Trabajo en clase

ALUMN@		

Se va a pedir el voto entre los residentes de una determinada comarca para determinar si se debe construir una planta química. El lugar de construcción está dentro de los límites de una ciudad, y por esta razón muchos votantes consideran que la propuesta pasará debido a la gran porción de votantes que favorecen la construcción. Para determinar si hay una diferencia significativa en la proporción de votantes de la ciudad y votantes del resto de la comarca se realiza una encuesta. Si 120 de 200 votantes de la ciudad favorecen la propuesta y 240 de 500 residentes en la comarca (fuera de la ciudad) también lo hacen, ¿estarías de acuerdo en que la proporción de votantes de la ciudad que favorecen la propuesta es más alto que la proporción de votantes de la comarca, con un intervalo de confianza del 97.5 %?

El enunciado, típico de un examen, está enmarañado para simular una situación de estrés. Dispone de sobreinformación al tiempo que se enuncian las preguntas de otra manera, pero trabajada en clases, laboratorios y/o proyectos, para enmarañar el escenario. En estas condiciones se da más información que la que realmente es necesaria.

El parámetro poblacional que se está estimando (**caso de la comarca**) es:

La proporción poblacional $\pi_{\text{comarca}} = \pi_{\text{c}}$.

Razona el tipo de estimación que se está pidiendo:

Dado que en el enunciado se habla explícitamente de intervalo de confianza se está pidiendo realizar una estimación confidencial o intervalar.

El modelo de probabilidad que hay que utilizar es (razona la respuesta):

Se debe utilizar el modelo normal de Gauss $\mathcal{N}(.,.)$ ya que tiene sentido aplicar la aproximación:

$$\mathcal{B}\left(n = 500,\ p = \frac{240}{500} = 0.4800\right) \xrightarrow[\substack{np=240>>4 \\ nq=260>>4}]{} \mathcal{N}\left(\mu = np,\ \sigma = \sqrt{npq}\right)$$

El error probable de la estimación (justifica la respuesta numéricamente):

$$\sigma_{\hat{\pi}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.48 \times 0.52}{500}} = \sqrt{\frac{0.2496}{500}} = 0.02234$$

¿Cuál ha de ser el tamaño de la muestra si el máximo error que se puede tolerar en la estimación debe ser de 0.0001?

El tamaño buscado debe ser al menos de:

$$\sigma_{\hat{\pi}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \sigma_{\max} = 0.0001 \Leftrightarrow n \geq \frac{p(1-p)}{\sigma^2_{\max}} = \frac{0.2496}{10^{-8}} = 24960000 \text{ personas}$$

¿Cuál es el valor de la variable aleatoria asociada a este enunciado para el nivel de confianza que se exige en el problema?

Dado que se hace uso del modelo normal, se deduce que:

$$z_\alpha = z_{97.5\,\%} \equiv z_{\left(97.5\,\% + \frac{2.5}{2}\%\right)} = z_{98.75\,\%} \underset{\text{interpolacion}}{=} \pm 2.2414$$

para un nivel de confianza $\alpha = 97.5\,\%$.

Calcula el intervalo de confianza que se está pidiendo (justifica la respuesta numéricamente):

Para el nivel de confianza $\alpha = 97.5\,\%$ pedido se tiene el siguiente intervalo de confianza.

$$\left[l_\alpha, \mathcal{L}_\alpha\right] = \hat{\pi} \pm z_\alpha \sigma_{\hat{\pi}} = 0.48 \pm 2.2414 \times 0.02234 = 0.48 \pm 0.0500729$$

$$\left[l_\alpha, \mathcal{L}_\alpha\right] = \left[0.429927, 0.530073\right]$$