8. Gaia: Polinomioak

8.1 Polinomioen eraztuna

Emaitzak beren orokortasun zabalenean enuntziatzeko $\mathbb{K}$ multzoa gorputza dela suposatuko dugu. Gorputza izateak batuketa eta biderketa definiturik izan eta zenbait propietate betetzen dituztela esan nahi du. Buruan izan beharreko gorputzen adibideak zenbakien gorputzak izango dira, hau da, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ edo $\mathbb{C}$ dela pentsa daiteke kapitulu honetan zehar.

Definizioa 8.1.1. Izan bedi $\mathbb{K}$ gorputza. Orduan $\mathbb{K}$*-ren gaineko polinomio*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

gisako adierazpenari esaten zaio, $a_i \in \mathbb{K}$ izanik $i = 0, 1, \ldots, n$.

Hona hemen polinomioekin loturiko beste hainbat definizio:

(i) $(a_0, \ldots, a_n)$ polinomioaren koefizienteak dira eta x polinomioaren indeterminatua edo aldagaia.

(ii) Bi polinomio berdinak direla diogu, baldin eta koefiziente guztiak berdinak badituzte.

(iii) Koefiziente guztiak 0 dituen polinomioari *polinomio nulu* esaten zaio.

(iv) Polinomio bat konstantea dela diogu $a_i = 0$ bada $i \geq 1$ guztietarako.

(v) $\mathbb{K}$-ren gaineko polinomio guztien multzoa $\mathbb{K}[x]$ bidez adieraziko dugu. Hau da,

$$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Polinomioen artean ere eragiketak defini ditzakegu. Ondoko eran definitzen dira polinomioen gaineko batuketa eta biderketa.

Definizioa 8.1.2. Izan bitez $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$ eta $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ $\mathbb{K}$-ren gaineko bi polinomio. Demagun $a_n, b_m \neq 0$ direla eta $n \leq m$. Orduan,

(i) f eta g-ren batuketa:

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_m x^m.$$

(ii) f eta g-ren biderketa

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_nb_m)x^{n+m} \\ &= \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right)x^j \end{aligned}$$

Aurretik multzo batek eragiketa batzuekiko dituen propietateen arabera gorputza izan daitekeela esan dugun era berean, eraztun bat ere izan dezakegu. Kasu honetan, $\mathbb{K}[x]$ multzoak aurreko definizioko batura eta biderkadurarekin betetzen dituen propietateekin, eraztun bat osatzen du. Horregatik esan ohi da $\mathbb{K}[x]$ polinomioen eraztuna dela.

Definizio zehatzetan sartu ez arren, hori aljebrako irakasgaietan lantzen delako, $\mathbb{Z}$ ere eraztuna da ohiko batuketa eta biderketarekin. Kapitulu honetan, $\mathbb{Z}$-rekin aurreko kapituluetan landu ditugun zenbait kontzeptu landuko ditugu, baina kasu honetan $\mathbb{K}[x]$ eraztunean.

Horretarako lehen urrats gisa, polinomio baten maila zer den definituko dugu.

Definizioa 8.1.3. Izan bedi $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ polinomioa. Orduan, *f-ren maila*, $\deg(f)$-ren bidez denotatuko duguna, f-ren koefiziente ez nulu handienaren indizea da.

Ohartu polinomio nuluarentzat ez dugula mailarik definitu. Zenbait tokitan $\deg(0) = -\infty$ definitu ohi da, hainbat propietate bete daitezen komenigarria delako. Bestetik, ohartu polinomio konstante ez nuluen maila zero dela.

Oharra 8.1.4. Notazio abusu bat eginda, polinomio bat $f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ gisan idatz dezakegu, jakinik a_i horiek denak puntu batetik aurrera zeroren berdinak direla. Hau da, polinomio bat batura finitu bat da beti. Orduan, idazkera honekin,

$$\deg(f) = \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

izango litzateke.

Ondoko proposizioak adierazten du zein erlazio dagoen polinomioen arteko eragiketa eta mailen artean.

Proposizioa 8.1.5. *Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x]$, orduan,*

(i) $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

(ii) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

Froga. Konprobazio hutsa da, batura eta biderkaduraren definizioei begiratuta. □

8.2 Zatigarritasuna

Esan bezala, ondoren $\mathbb{Z}$-n geneuzkan zatigarritasuna, zatiketaren algoritmoa, Euklidesena eta zatitzaile komun handienaren kontzeptuak $\mathbb{K}[x]$ eraztunera ekarri nahiko ditugu.

Definizioa 8.2.1. Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x]$ bi polinomio. Orduan g-k f zatitzen duela diogu, eta $g \mid f$ adieraziko dugu, baldin eta existitzen bada $h \in \mathbb{K}[x]$ polinomio bat zeinentzako $f = gh$ den.

Oharra 8.2.2. Ohartu zatigarritasunak zerbait esaten digula polinomioen mailaz. Izan ere, $g \mid f$ bada, orduan $\deg(g) \leq \deg(f)$ dugu derrigorrez.

Zatigarritasun honek, zenbakien kasurako geneuzkan zenbait propietate betetzen ditu:

Proposizioa 8.2.3. *Izan bitez $f, g, h \in \mathbb{K}[x]$. Orduan,*

(i) $f \mid f$ *eta* $1 \mid f$, $\forall f \in \mathbb{K}[x]$, *non hemen* 1 *polinomio konstantea den.*

(ii) $f \mid 0$, $\forall f \in \mathbb{K}[x]$.

(iii) $f \mid g$ *eta* $g \mid f$ *dira, baldin eta soilik baldin* $f = \pm g$ *bada.*

(iv) $f \mid g$ *eta* $g \mid h$ *badira, orduan* $f \mid h$ *da.*

(v) $f \mid g$ *eta* $f \mid h$ *badira, orduan* $f \mid ng + mh$ *da edozein* $m, n \in \mathbb{K}[x]$*-rako.*

Ariketa 8.i. Eman aurreko proposizioaren froga. *Laguntza, ikusi Proposizioa 6.1.2-en zenbaki osoekin egindako frogapena.*

Zatiketaren algoritmoa

Teorema 8.2.4 (Zatiketaren algoritmoa)**.** *Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x]$ non $g \neq 0$ den. Orduan existitzen dira $h, r \in \mathbb{K}[x]$ bakarrak, non $r = 0$ edo $\deg(r) < \deg(g)$ den zeinentzako*

$$f = gh + r$$

den.

Froga. Frogapen hau ere $\mathbb{Z}$-koa egin genuen modu berean egin daiteke.

Izan bedi $S = \{p \in \mathbb{K}[x] \mid p = f - gq, \text{ non } q \in \mathbb{K}[x]\}$ den. Ohartu S multzoa ez-hutsa dela, adibidez $f \in S$ delako.

Batetik $0 \in S$ bada, orduan existitzen da h non $0 = f - gh$ den, hau da $f = gh$ da $r = 0$ izanik. Demagun orain, $0 \notin S$ dugula. Izan bedi $r \in S$ multzoan maila txikiena duen polinomioetako bat.

Orain, $r \in S$ denez, badakigu $r = f - gh$ dela $h \in \mathbb{K}[x]$-ren batentzako, $\deg(r) \geq 0$ izanik. Ikus dezagun r-ren maila ezin dela g-rena baino handiago edo berdina izan. Absurdura eramanez, demagun $k = \deg(r) \geq \deg(g) = m$. Idatz ditzagun $r(x) = b_0 + \cdots + b_k x^k$ eta $g(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m$. Orduan, ondoko polinomioa hartzen badugu

$$t(x) = f(x) - g(x)h(x) - \frac{b_k}{a_m} x^{k-m} g(x) = r(x) - \frac{b_k}{a_m} x^{k-m} g(x),$$

ohartu $r(x)$-ren koefiziente nagusia b_k zela eta kentzen dagoen polinomioarena ere hala dela. Beraz, $\deg(t) < \deg(r)$ dugu. Baina gainera, $t = f - g(h - \frac{b_k}{a_m} x^{k-m})$ izateagatik, $t \in S$ da. Baina hau ez da posible, r zelako S-n maila txikieneko polinomioa eta t-k maila hertsiki txikiagoa duelako. Beraz, kontraesan batera iritsi gara eta $\deg(r) < \deg(g)$ dugu derrigor.

Froga dezagun, azkenik, h eta r bakarrak direla. Demagun existitzen direla h_1, h_2 eta r_1, r_2 polinomioak non $f = gh_1 + r_1 = gh_2 + r_2$ den, $r_i = 0$ edo $\deg(r_i) < \deg(g)$ izanik $i = 1, 2$ kasuetan.

Orduan, $g(h_1 - h_2) = r_2 - r_1$ dugu, eta alde bietan maila hartuz,

$$m \leq \deg(g) + \deg(h_1 - h_2) \leq \deg(r_2 - r_1) \leq \max\{\deg(r_1), \deg(r_2)\} < m$$

dugu. Hori egia izateko modu bakarra $\deg(h_1 - h_2)$ edo $\deg(r_2 - r_1)$ definituta ez egotea da, hau da $h_1 - h_2 = 0$ edo $r_2 - r_1 = 0$ izatea. Bi kasuetatik ondorioztatzen da $r_1 = r_2$ eta $h_1 = h_2$ izan behar direla. $\square$

Zatitzaile komun handiena

Berriz ere, zenbaki osoen kasuan egin genuen antzera defini daiteke bi polinomioren zatitzaile komun handiena. Zenbakien kasuan positiboa izatea jarri behar izaten genuen baldintza gisa, bestela bere negatiboak ere baldintzak betetzen zituelako, eta bakarra izatea nahi genuelako. Kasu honetan, polinomio baten konstante bidezko multiplo guztiek beteko dituzte propietateak, eta bakarra izatea nahi dugunez, koefiziente nagusia 1 duena aukeratuko dugu. Koefiziente nagusia (hau da, maila handienekoa) 1 duten polinomioei *moniko* izena ematen zaie.

Definizioa 8.2.5. Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Orduan f eta g-ren *zatitzaile komun handiena*, $\text{zkh}(f, g)$ adieraziko duguna d polinomio monikoa da, ondoko bi propietateak betetzen dituena:

(i) $d \mid f$ eta $d \mid g$;

(ii) baldin $c \mid f$ eta $c \mid g$ badira, orduan $c \mid d$.

Teorema 8.2.6. *Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Orduan f eta g-ren zatitzaile komun handiena, d, beti existitzen da eta bakarra da. Gainera, existitzen dira $x, y \in \mathbb{K}[x]$ non $d = fx + gy$ den.*

Ariketa 8.ii. Froga hau ere zenbaki osoen froga imitatuz egin daiteke. Kasu honetan, txikiena eta positiboaren ordez, maila txikienekoa eta monikoa aukeratu behar delarik. Saiatu Teorema 6.2.2-koan oinarrituz froga formala idazten.

Definizioa 8.2.7. Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Orduan $d = \text{zkh}(f, g)$ izanik $d = fx + gy$ idazkerari *Bézout-en identitatea* esaten zaio.

Euklidesen algoritmoak eta Bézout-en identitatea lortzeko prozedurek zenbakiekin bezala funtzionatzen dute kasu honetan ere. Ikus dezagun adibide konkretu batekin:

Adibidea 8.2.8. Kalkula dezagun $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + 4$ eta $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ polinomioen zatitzaile komun handiena.

- $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + 4 = (x^3 + 2x^2 - 4x + 1)(x - 1) + 4x^2 - 9x + 5$;
- $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = (4x^2 - 9x + 5)\left(\frac{1}{4}x + \frac{17}{16}\right) + \frac{69}{16}x - \frac{69}{16}$;
- $4x^2 - 9x + 5 = (x - 1)(4x - 5)$.

Ohartu hirugarren pausuan ondoko propietatea erabili dugula: $c \neq 0 \in \mathbb{K}$ konstantea bada, $\text{zkh}(f, g) = \text{zkh}(f, cg)$. Beraz, azken hondar ez nulua $\frac{69}{16}x - \frac{69}{16}$-ren ordez, $x - 1$ bere multiplo monikoa erabili dugu. Azken hondarra 0 denez, azken aurreko hondar ez nuluari dagokion polinomio monikoa, hau da, $x - 1$ izango da zatitzaile komun handiena.

8.3 Polinomioen faktorizazioa

Zenbakiekin egin bezala, polinomioekin ere biderkadura gisa adierazpen bakar bat lortu nahiko dugu. Baina kasu honetan zenbaki lehenik ez daukagunez, zenbaki lehenen papera jokatuko duten polinomioak zein izango diren erabaki behar dugu.

Definizioa 8.3.1. Izan bedi $f \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ polinomioa. Baldin eta existitzen badira $h, g \in \mathbb{K}[x]$ non $1 \leq \deg(h), \deg(g) < \deg(f)$ eta $f = gh$ den, orduan f *polinomio erreduziblea* dela esango dugu. Kontrako kasuan, f *polinomio irreduziblea* dela esaten da.

Oharra 8.3.2. Garrantzitsua da jakitea erreduzible izatea edo ez gorputzaren arabera aldatzen dela. Adibidez, $x^2 - 2$ polinomioa irreduziblea da $\mathbb{Q}[x]$ eraztunean, ezin delako lehenengo mailako biren biderkadura gisa idatzi. Aldiz, $\mathbb{R}[x]$-n bageunde, orduan $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ denez, $\mathbb{R}$-ren gainean polinomio bera erreduziblea da.

Berriz ere, zenbaki osoen kasuan daukagun antzerako emaitza bat dugu.

Teorema 8.3.3. *Izan bedi $f \in \mathbb{K}[x]$ polinomio ez-konstante bat. Orduan, existitzen dira $g_1, g_2, \dots, g_k$ polinomio irreduzibleak $\mathbb{K}[x]$-n, zeinetarako $f = g_1 g_2 \dots g_k$ den. Gainera, faktorizazio bakarra da salbu faktoreen ordena eta konstanteekiko biderkadurak.*

Aipatu dugun moduan, gorputzaren araberakoa da irreduzible izaera. Propietate hau polinomioaren erroekin dago estuki lotuta.

Definizioa 8.3.4. Izan bedi $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ polinomioa. Baldin eta $(x-\alpha)^m \mid f(x)$ badugu eta $(x - \alpha)^{m+1}$-ek ez badu $f(x)$ zatitzen $m \in \mathbb{N}$ izanik, orduan α *f-ren erroa* dela diogu, *α-ren anizkoiztasuna* m izanik.

Definizioa 8.3.5. Izan bedi $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $\mathbb{K}$-ren gaineko polinomioa. Orduan *f-ren deribatu formala*, $f'(x)$ bidez adieraziko duguna, ondoko polinomioa da

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Teorema 8.3.6. *Izan bitez $f \in \mathbb{K}[x]$ polinomioa eta α bere erroa. Orduan α-ren anizkoiztasuna m da, baldin eta soilik baldin*

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)'}(\alpha) = 0 \text{ eta } f^{(m)'}(\alpha) \neq 0$$

badira.

Ariketa 8.iii. Idatzi teoremaren froga.

Oro har ez da erraza ez polinomioen erroak aurkitzea, ez eta polinomio bat irreduziblea noiz den erabakitzea ere. Hala ere, badaude irizpide batzuk, lagungarri suerta daitezkeenak:

Irreduzibilitate irizpideak

Izan bedi $f \in \mathbb{K}[x]$ polinomio bat. Orduan,

(i) Lehen mailako polinomioak irreduzibleak dira beti.

(ii) Baldin eta $\deg(f) = 2$ edo $\deg(f) = 3$ bada, orduan f irreduziblea da $\mathbb{K}$-ren gainean baldin eta soilik baldin ez badu errorik.

(iii) Baldin eta $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ bada eta $\deg(f) \geq 2$ bada, orduan f-k $\mathbb{Q}$-n $\alpha = \frac{r}{s}$ erroren bat izatekotan $\text{zkh}(r, s) = 1$ izanik, derrigorrez $r \mid a_0$ eta $s \mid a_n$.

(iv) *Gaussen lema:* Baldin eta $f \in \mathbb{Z}[x]$ bada, orduan $\mathbb{Q}[x]$-n f polinomioa $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ maila txikiagoko bi polinomio ez-konstanteren biderkadura gisa adieraz daiteke, baldin eta soilik baldin $g', h' \in \mathbb{Z}[x]$-ko maila txikiagoko bi polinomio ez-konstanteren biderkadura gisa adieraz badaiteke.

(v) *Einseinstein-en irizpide orokortua.* Baldin eta $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ eta $p \in \mathbb{N}$ zenbaki lehenak badira, eta

- $p \mid a_0, p \mid a_1, \ldots, p \mid a_{r-1}$ non $1 \leq r \leq n$ den,
- $p^2 \nmid a_0$,
- $p \nmid a_r$.

Orduan f-k $\mathbb{Z}[x]$ eraztunean r edo r baino maila handiagoko faktore irreduzible bat dauka. Bereziki, $r = n$ bada, f irreduziblea da $\mathbb{Q}[x]$-ren gainean.

Adibideak 8.3.7. Ikus ditzagun aurreko irizpideen aplikazio batzuk.

(ii) Demagun $x^2 + 4$ polinomioa dugula. Badakigu $\mathbb{R}$-n ez duela errorik eta, beraz, $\mathbb{R}$-n eta $\mathbb{Q}$-n irreduziblea dela ziurta dezakegu.

(iii) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 8x + 1$ polinomioak erro arrazionalen bat izatekotan, badakigu ± 1 edo $\pm 1/2$ direla dauzkagun aukerak. Baina nola $f(\pm 1) \neq 0$ eta $f(\pm 1/2) \neq 0$ dugun, f-k ez du erro arrazionalik, eta hirugarren mailakoa izateagatik, $\mathbb{Q}$-n irreduziblea dela ondorioztatzen dugu.

(iv) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomioak ez du erro arrazionalik onartzen (± 1 ez delako erroa). Beraz, $\mathbb{Q}$-n erreduziblea izatekotan bi polinomioren biderkadura izango da. Baina Gauss-en irizpidearen arabera, hori gertatzeko $\mathbb{Z}$-ren gainean ere izan behar da bigarren mailako bi polinomioren biderkadura. Orduan, $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ berdintzan koefizienteak berdinduz, ondoko baldintzak lortzen dira:

$$bd = 1, bc + da = 8, d + b + ac = -2 \text{ eta } a + c = 0.$$

Nola sistema honek ez daukan soluziorik, f polinomioa $\mathbb{Q}$-ren gainean irreduziblea dela ondoriozatatzen dugu.

(v) Baldin eta $f(x) = x^6 - 25x^5 + 3x^2 + 12 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomioari begira, $p = 3$ hartuz, $3 \mid 12$, $3 \mid 0$, $3 \mid 3$ dugu, eta $9 \nmid 12$ eta $3 \nmid -25$. Beraz, f-k gutxienez 5 mailako faktore bat dauka. Baina 5 mailako faktore bat balu, erroren bat izango luke $\mathbb{Q}$-n, baina (iii) irizpidea aplikatuz ikus daiteke ezetz, eta beraz, f-k duen faktore hori 6.mailakoa da, hau da, f irreduziblea da.

Ohartu aurreko irizpide gehienak $\mathbb{Q}$-ren gainean direla baliagarriak. Izan ere, $\mathbb{R}$-n eta $\mathbb{C}$-n ondo ezagutzen ditugu polinomio irreduzibleak zein diren.

Teorema 8.3.8 (Aljebraren oinarrizko printzipioa)**.** *Izan bedi* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinomioa eta demagun* $\deg(f) = n$ *dela. Orduan* f*-k zehazki* n *erro dauzka* $\mathbb{C}$*-n.*

Teorema honen froga ikusteko irakasgai honetatik kanpo geratzen diren eduki sakonagoak ezagutu behar dira.

Korolarioa 8.3.9. $\mathbb{C}[x]$ *eraztunean polinomio irreduzible bakarrak lehen mailakoak dira.*

Honi esker, $\mathbb{R}$-n ere polinomio irreduzibleak nolakoak diren jakin dezakegu.

Teorema 8.3.10. $\mathbb{R}[x]$ *eraztunean polinomio irreduzibleak lehen mailako eta errorik ez duten bigarren mailako polinomioak dira.*

Froga. Badakigu $f \in \mathbb{R}[x]$ bada eta n maila badu, zehazki n erro dauzkala $\mathbb{C}$-n. Erro horiek parte irudikaririk ez badute $\mathbb{R}$-n egongo dira, eta beraz, f lehen mailako $(x - \alpha)$ motako faktoreez zati dezakegu.

Orain $\alpha = a + bi$ baldin badugu $b \neq 0$ izanik, orduan $\overline{\alpha}$ ere f-ren erroa izan behar da. Izan ere $0 = \overline{f(\alpha)} = \overline{f}(\overline{\alpha}) = f(\overline{\alpha})$ dugu, non $\overline{f}$ den f-ren koefizienteen konjokatuek definituriko polinomioa, eta non $\overline{f} = f$ dela erabili dugun $f \in \mathbb{R}[x]$ delako. Baina orduan $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ polinomioak, koefizienteak $\mathbb{R}$-n dituenak, f zatitzen du.

Frogatu dugu edozein $f \in \mathbb{R}[x]$ lehen eta bigarren mailako faktoreen biderkadura gisa idatz dezakegula. Beraz, horiek dira polinomio irreduzible bakarrak. □

8.4 Batugai soiletako zatikien deskonposizioa

Bukatzeko, polinomioen zatidura gisa dauzkagun adierazpenak aztertu eta nola sinplifika ditzakegun ikusiko dugu.

Teorema 8.4.1. *Izan bitez* $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ *non* $\deg(g) \leq \deg(f)$*, eta* $g(x) = p(x)q(x)$ *den* $\text{zkh}(p, q) = 1$ *izanik. Orduan* $f(x)/g(x)$ *zatikia modu bakar batean adieraz daiteke ondoko eran:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{u(x)}{q(x)} + \frac{v(x)}{p(x)},$$

$h, u, v \in \mathbb{K}[x]$ *izanik,* $\deg(u) < \deg(q)$ *eta* $\deg(v) < \deg(p)$*.*

Froga. Alde batetik, badakigu zatiketaren algoritmoa erabiliz, badaudela $h(x)$ eta $r(x)$ bakarrak $\deg(r) < \deg(g)$ izanik non $f = gh + r$ den, eta beraz,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

lortzen dugu.

Bestetik, $\text{zkh}(p, q) = 1$ denez, Bézout-en identitatearen arabera existitzen dira $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[x]$ non $1 = \alpha q + \beta p$ den. Orduan, aurreko adierazpenean $r = r\alpha q + r\beta p$-rekin ordezkatu dezakegu, eta honelako zerbait lortuko genuke:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)\alpha(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)\beta(x)p(x)}{g(x)}.$$

Orain zatiketaren algoritmoa $r\beta$ eta q-ri aplikatuz, badakigu existitzen direla m, u bakarrak $\deg(u) < \deg(q)$ izanik non $r\beta = mq + u$ den. Beraz,

$$r = r\alpha q + (mq + u)p = (r\alpha + mp)q + pu$$

dugu. Orduan $v = r\alpha + mp$ hartuz,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= h(x) + \frac{v(x)q(x)}{g(x)} + \frac{u(x)p(x)}{g(x)} \\ &= h(x) + \frac{v(x)}{p(x)} + \frac{u(x)}{q(x)}.\end{aligned}$$

Falta zaigun bakarra $\deg(v) < \deg(p)$ ikustea da. Ohartu

$$\deg(vq) = \deg(r - up) \leq \max\{\deg(r), \deg(up)\} < \deg(g) = \deg(qp)$$

dela, eta beraz, frogatuta geratzen da. □

Korolarioa 8.4.2. *Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x]-\{0\}$ eta demagun $g(x) = p_1(x)^{r_1} \dots p_k(x)^{r_k}$ dela g-ren faktore irreduzibletako deskonposaketa. Orduan, f/g honela adieraz dezakegu:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{u_{11}(x)}{p_1(x)} + \dots + \frac{u_{1r_1}(x)}{p_1(x)^{r_1}} + \dots + \frac{u_{k1}(x)}{p_k(x)} + \dots + \frac{u_{kr_k}(x)}{p_k(x)^{r_k}},$$

$u_{ij} \in \mathbb{K}[x]$ eta $\deg(u_{ij}) < \deg(p_i)$ izanik.

Ondorioz, aurretik ikusitakoarekin uztartuz, $\mathbb{C}$-n eta $\mathbb{R}$-n beti lor ditzakegu zatikiak batura gisa adieraztea baturan zatitzaileak lehen edo bigarren mailako polinomioen berreturak izanik.

Adibidea 8.4.3. Demagun

$$g(x) = (x-2)^3(x^2+4)(x^2+x+1)^2$$

dugula. Badakigu $x^2 + 4$ eta $x^2 + x + 1$ polinomioek ez dutela erro errealik eta, ondorioz, irreduzibleak dira $\mathbb{R}[x]$-n. Orduan, $\deg f < \deg g = 9$ bada,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{D_1x+E_1}{x^2+x+1} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+x+1)^2}$$

modura adieraz dezakegula badakigu. Ondoren konstanteak kalkulatzeko, biderkadura egin eta f-ren koefizienteekin berdintzean lortzen dugun sistema ebatzi beharko genuke.