2. Gaia: Multzoak, funtzioak eta erlazioak

2.1 Multzoak

2.1.1 Multzoa eta azpimultzoak

Multzoak matematikaren oinarri-oinarrizko kontzeptu bat dira. Itxuran sinplea eman dezakeen zerbait da multzo bat, eta guk hala pentsatuko dugu. Multzo bat, guretzako, objektuen bilduma bat besterik ez da izango. Baina zorrotzak izango bagina, definizioan erabiltzen ditugun beste kontzeptuak aurretik definituta izan beharko genituzke. Eta beraz, galdera izango litzateke zein den *objektu* eta *bilduma* hitzen definizioa. Horiek definitzen saiatuko bagina, ziur aski, aurrez definitu gabe dauzkagun beste kontzeptu batzuetan eroriko ginateke, definizio-kate amaiezin batean eroriz. Multzoen teoria matematikaren atal abstraktu eta konplexuenetakoa da, eta erabat zorrotzak izanik, 1+1=2 dela frogatzearen inguruko eztabaidak beharbada 100 orrialde beharko lituzke. Edozein kasutan, eztabaida maila horretara iristeko, batek aldez aurretik oinarrizko matematikaren ezagutza eta hurbiltze bat beharrezkoa du. Horregatik onartuko dugu objektu edo elementuen bilduma bat dela multzoa. Nonbaitetik hasi behar dugulako.

Esan bezala, gu definizio lauso edo *naïve* honekin konformatuko gara.

Definizioa 2.1.1. Multzoa objektuen bilduma da, puntuak edo elementuak deitzen direnak. Multzoak letra larriz idatzi ohi dira orokorrean eta elementuak, letra xehez. x X-ren elementua bada, $x \in X$ idatziko dugu. Antzera, $x \notin X$ adierazpenak esan nahi du x ez dela X-ren elementua.

Multzo hutsa elementurik ez duen multzoa da eta $\emptyset$ idazten da.

Ohartu multzo bat elementuen bilduma bat izanik, multzoa definitzeko aski dela bere baitan dauzkan elementuak zehaztea. Ohitura da multzo baten elementuak giltzen artean zerrendatzea. Hala, A multzoa bada 1-etik 4-rako zenbaki arrunten multzoa, hala adieraztea aski litzateke:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Jakina, multzo batek izan litzake askoz elementu gehiago. Kasu batzuetan, intuizioz badakigu zerrendak nola jarraitzen duen. Beraz, puntu suspentsiboak erabil ditzakegu. Adibidez, B multzoa balitz 1-etik 100-erako zenbaki arrunten multzoa, hala adieraziko genuke:

$$B = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}.$$

Baina are gehiago, gerta liteke deskribatu nahi dugun multzoa infinitua izatea. Kasu horretan, puntu suspentsiboak amaieran jarriko ditugu, zerrenda amaiezina dela ulertarazteko. Adibidez, zenbaki arrunt guztiak dituen multzoa deskribatu nahi bagenu, honela adieraziko genuke:

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Zenbaki multzo ezagunak

Ohiko zenbaki multzoentzako notazio berezia erabiltzen da. Hemen ditugu aipagarrienak:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ zenbaki arrunten multzoa.[5]
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ zenbaki positiboen multzoa.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ zenbaki osoen multzoa.
- $n\mathbb{Z} = \{\ldots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \ldots\}$ n zenbaki arruntaren multiploen multzoa.
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ zenbaki arrazionalen multzoa.
- $\mathbb{R}$ zenbaki errealen multzoa.
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ zenbaki irrazionalen multzoa (errealak diren zenbaki ez-arrazionalen multzoa).
- $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ zenbaki konplexuen multzoa.

Multzoen deskribapena

Ohartu zerrenda infinitua izan daitekeela "bi ertzetatik". Zenbaki osoen kasua da horren adibidea. Bestalde, multzo hauek denak ez ditugu zerrenda bidez eman. Adibidez, $\mathbb{Q}$ definitzerakoan, multzo horretako zenbakiek zein propietate betetzen duten zehaztu dugu. Alegia, bi zenbaki osoren zatiketa direla, beti ere zatikizuna ezberdin zero izanik. Bukatzeko, ohartu $\mathbb{R}$ multzoa ez dugula "definitu". Zenbaki errealen definizioa ez da sinplea, eta aurrerago ikusiko duzue beste irakasgairen batean.

Multzoak definitzeko bi era izango ditugu, beraz:

(i) **Hedaduraz**: bere elementu guztiak zerrendatuz edo, infinitu elementu baditu, hasierakoak aipatuz argi gera dadin nola jarraitu daitekeen zerrenda. Adibidez, zenbaki arrunt bikoitien multzoa $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ moduan adieraz daiteke.

[5] Ez dago adostasun zabalik 0-a zenbaki arrunten multzoan sartu edo ez sartzearen inguruan. Beraz, adi ibili behar dugu kasu bakoitzean zer esan nahi dugun argi uzteko. Guk, printzipioz, ez dugu multzoan sartuko, eta sartu nahi dugunean adierazi egingo dugu.

(ii) **Ezaupidez**: multzoaren elementuak karakterizatzen dituen propietatea, edo propietateak, emanez, $\{x \in X \mid P(x)\}$[6] Adibidez, zenbaki arrunt bikoitien multzoa $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ moduan adieraz daiteke.

Ohartu, aurreko kapituluarekin loturik, *ezaupidez* definitutako multzoa enuntziatu ireki batek definitzen duela. Multzoko elementuak X multzo handiago bateko elementuak dira zeinentzako $P(x)$ enuntziatu irekia egia den.

Multzo bakoitza definitzeko ez dago modu bakar bat. Alderantziz, modu ezberdin asko egon litezke. Esaterako, n zenbaki arrunt baten multiploen multzoa, zerrenda bidez beharrean ezaupidez ere eman genezake honela:

$$n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\, m = kn\}.$$

Edo irrazionalen kasuan, oraindik definitu ez dugun eta berehala ikusiko dugun adierazpen bat erabili dugu, baina nahi izan bagenu ezaupidez ere definitu genezake:

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Ikus ditzagun era honetako adibide gehiago.

Adibideak 2.1.2. (i) "$P(x) : (x > 3) \wedge (x^2 \leq 25)$" baldin bada

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}$$

tarte bat izango da, hain zuzen ere

$$A = (\,3, 5\,]$$

tartea. *Ziurrenik aldez aurretik ikusiko zenuten gisan, parentesia erabili ohi da elementua multzotik kanpo dagoela adierazteko, eta kortxetea elementua multzoan dagoela adierazteko.*

Baina adi! Garrantzitsua da hasieran zein multzotan hartzen ari garen elementuak. Izan ere

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid P(x)\}$$

izango bagenu, erabat ezberdina den multzoa lortzen dugu. Kasu honetan

$$B = \{4, 5\}$$

baino ez da. Aurreko kasuan multzo infinitu bat lortu dugu, eta orain 2 elementu soilik dauzkan bat! Adi beraz, multzoak era honetan definitzerakoan garrantzitsua da zein multzotan jartzen dugun baldintza hori.

[6] Hau irakurri edo pentsatzeko modua honakoa litzateke: "X multzo nagusiko x elementuak non/zeinentzako $P(x)$ egia den. Erdiko $\mid$ motako marraren ordez $:$ bi puntu ere ager daitezke batzuetan. Biak izatearen arrazoia da kasu batzuetan bi puntuek edo marrak osteko propietatean ager daitezkeela. Esaterako, $2 \mid n$ notazioa erabili ohi da "2-k n zatitzen du adierazteko. Orduan txukunago geratzen da $\{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n\}$ idaztea $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid n\}$ beharrean. Eta alderantziz, adibidez, funtzioak adierazteko aurrerago ikusiko dugu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-k adieraziko duela $\mathbb{R}$-tik $\mathbb{R}$-rako funtzio bat. Orduan, txukunagoa izango da $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x, f(x) = f(-x)\}$ idaztea $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall x, f(x) = f(-x)\}$ baino.

(ii) "$Q(x)$: x hitza A letraz hasten da" baldin bada gure baldintza,

$$C = \{x \in \text{Pertsona izenak} \mid Q(x)\}$$

multzoa halako zerbait litzateke

$$C = \{\text{Ane, Amaia, Andoni, Aitzol, Aitor,...}\}.$$

Aldiz,

$$D = \{x \in \text{Herri izenak} \mid Q(x)\}$$

bagenu,

$$D = \{\text{Andoain, Algorta, Azkoiti, Aretxabaleta, Azkaine, Atarrabia,...}\}$$

izango litzateke.

Multzoak elkarrekin nola erlazionatzen diren jakitea interesatuko zaigu. Noiz dagoen multzo bat beste baten barruan, noiz diren bi multzo berdinak, bi multzok ba ote duten elementurik komunean ala ez...

Definizioa 2.1.3. Izan bitez A eta B bi multzo. A B-ren *parte* edo A B-ren *azpimultzoa* dela diogu, eta $A \subseteq B$ idatzi, baldin $x \in A$ guztietarako, $x \in B$ bada. Aurreko kapituluan landutako lengoaian idatzita eta A eta B X multzo handiago baten bi azpimultzo direla suposatuz:

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall x \in X,\, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Ohartu, aurreko (i) adibidean esate baterako $B \subseteq A$ daukagula, 4 eta 5 zenbakiak badaudelako A tartearen barruan. Baina alderantziz ez, tarte osoko elementuak ez daude B-n. Adibidez, 4.5 zenbakia ez dago B-n. *Ohartu aski dela elementu bat existitzea A-n dagoena eta B-n ez, partekotasun hori bete ez dadin.* Hori $B \subsetneq A$ eran idatz daiteke, eta B A-ren *azpimultzo propioa* dela esan ohi da. Bestalde, aurreko adibideko (ii) atalean ikus daiteke $C \nsubseteq D$ eta $D \nsubseteq C$ dela, hau da, C ez dago D-ren barruan ezta alderantziz ere.

Bi multzo berdinak direla esango dugu baldin eta elementu berak badituzte. Edo beste era batera esanda, baldin eta bataren elementu guztiak bestean badaude.

Definizioa 2.1.4. Izan bitez $A, B \subseteq X$ bi multzo. A eta B multzoak berdinak direla diogu, baldin eta elementu berak badituzte. Bestela esanda,

$$A = B \Longleftrightarrow ((A \subseteq B) \text{ eta } (B \subseteq A)).$$[7]

Aurrerago maiz ikusiko dugun bezala, definizio hau lagungarri egingo zaigu bi multzo berdinak direla frogatzeko garaian. Izan ere, bi multzo berdinak direla ikusteko "ohiko" prozedura bi partekotasunak frogatzea da. Kasu batzuetan beste teknika batzuk erabili ahalko ditugu, multzoei buruz informazio gehiago baldin badaukagu, baina bestela bide hau jarraitu beharko dugu.

[7]Batzuetan $\wedge$ idatzi ordez zuzenean "eta" idazten da, eta gauza bera $\vee$-rekin, "edo" idatz dezakegu nahi izanez gero. Oro har, ohitura hau da zabalduen dagoena.

Adibidea 2.1.5. Izan bitez $A = 4\mathbb{Z}$ eta $B = 2\mathbb{Z}$ eta froga dezagun $A \subseteq B$ betetzen dela. Hau da, ikusi nahi dugu $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \in A \Rightarrow n \in B$ dugula. Hasteko, unibertsal bat frogatu nahi dugunez, har dezagun $n \in \mathbb{Z}$ edozein zenbaki oso. Ikusi nahi dugu A-n dagoela suposatuta B-n dagoela ondoriozta dezakegula. Erabil dezagun A-n egoteak zer esan nahi duen. Baldin eta $n \in A$ bada, orduan n 4-ren multiploa da, alegia, existitzen da $k \in \mathbb{Z}$ bat zeinentzako $n = 4k$ den. Baina orain, n interesatzen zaigun moduan idatz dezakegu B-n ere badagoela frogatzeko. Hain zuzen ere $n = 2(2k)$ da, eta k osoa denez, $2k$ ere bai. Lortu dugunez n idaztea 2 bider zenbaki oso baten gisan, n bikoitia da, eta beraz, B-n dago. Hala, frogatuta geratzen da $A \subseteq B$ dela.

Ohartu azken batean goiko kasuan partekotasun bat frogatzea inplikazio bat frogatzea bihurtu zaigula. Beti ez da kasua izango, baina ezaupidez emanda dauden multzoetan askotan bai.

2.1.2 Multzoen arteko eragiketak

Multzo "zaharretatik" berriak eraiki ahalko ditugu, hein batean enuntziatu zaharretatik berriak eraiki genituen gisan. Ikusiko duzuen moduan, lotura estua izango dute eraikuntza modu hauek enuntziatuenekin. Izan ere, lotura izango dute ukapen, konjuntzio eta disjuntzioarekin nolabait.

Osagarria

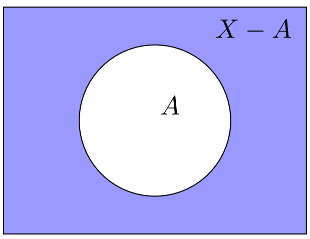
Has gaitezen dagoeneko agertu zaigun batekin. Ikusi dugu irrazionalen multzoa zenbaki errealen barruan arrazionalak *ez* diren elementuek osatzen duten multzoa dela.

Definizioa 2.1.6. Izan bedi $A \subset X$. A multzoaren *osagarria* X*-n*

$$X - A = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

multzoa da. Argi dagoenean zein X-rekiko hartzen den osagarria, A^c ere idatzi ohi da, $X - A$ edo $X \setminus A$-ren ordez.

Multzoekin lan egiterakoan lagungarri izaten dira Venn-en diagrama deritzenak. Beharbada ikusiko zenituzten lehenago ere, multzoak irudikatu eta kasu bakoitzean dagokion atala koloreztatzean datza. Adibidez, hau litzateke osagarriaren Venn-en diagrama:

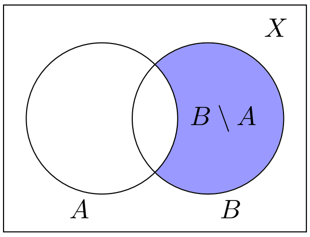


Era berean, X-ren barruan dauden bi multzoren arteko diferentzia ere defini daiteke.

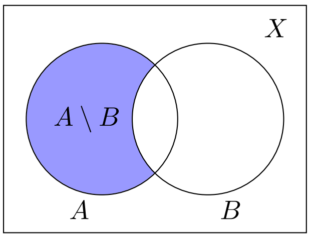
Definizioa 2.1.7. Izan bitez $A, B \subseteq X$. Orduan, A-ren B-rekiko osagarria esaten zaio B dauden eta A-n ez dauden elementuek osatzen duten multzoari. Bestela esanda,

$$B - A = B \setminus A = \{x \in X \mid x \in B \text{ eta } x \notin A\}.$$

Kasu honetan hau litzateke Venn-en diagrama:



Eta jakina, antzera defini dezakegu $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ eta } x \notin B\}$ ere:



Bildura eta ebakidura

Diferentzia edo osagarria ukapenarekin definitu dugun antzera defini ditzakegu bildura eta ebakidura.

Definizioa 2.1.8. Izan bitez $A, B \subseteq X$ bi multzo. Orduan,

(i) *A eta B-ren bildura*, $A \cup B$ bidez adieraziko duguna, A-n edo B-n (edo bietan) dauden elementuek osatzen dute. Hau da,

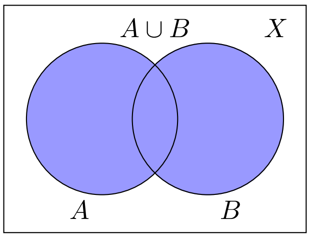
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ edo } x \in B\}.$$

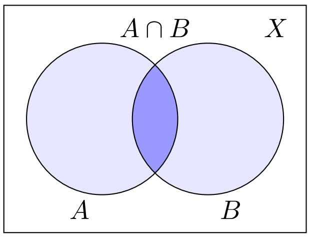
(ii) *A eta B-ren ebakidura*, $A \cap B$ bidez adieraziko duguna, A-n eta B-n (bietan aldi berean) dauden elementuek osatzen dute. Hau da,

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ eta } x \in B\}.$$

Bi multzoren ebakidura multzo hutsa denean, hau da, ez badute elementurik komunean, multzo horiek *disjuntuak* direla esaten da.

Irudi bidez adierazita ondokoak izango genituzke:





Alegia, bilduraren kasuan bai A eta bai B osorik margotuz lortzen dugun zatia daukagula. Eta ebakiduran aldiz, biak margotuz gero "bi" aldiz pintatu duguna bakarrik, ilunen dagoen zatiarekin geratzen gara soilik.

Ohartu zenbait erlazio iradokitzen dizkigutela irudi hauek. Esate baterako A eta B-ren ebakidura, bildurari $A \setminus B$ eta $B \setminus A$ kentzerakoan lortzen dugula. Bestela esanda

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)).$$

Edo A osoa lortzen dugula $B \cap A$ eta $A \setminus B$ bilduta ere nabaria da. Hau da

$$A = (B \cap A) \cup (A \setminus B).$$

Hala ere, kontuz ibili behar dugu. Izan ere, irudiek lagun diezagukete egiazko izan daitezkeen enuntziatuak ikusten, edo intuizioa izaten, baina diagrama edo irudi batek ez du proposizio bat frogatzen. Formalki frogatzeko gai izan beharko ginateke, baldin eta irudiak dioena egiazkoa bada.

Multzoek ere, badute beraien *aljebra*. Aljebra esaten zaio eragiketa batekiko propietate batzuk betetzen dituen egitura bati. Kasu honetan eragiketak ebakidura, bildura eta diferentzia izango lirateke. Hauek dira eragiketa horiek betetzen dituzten zenbait propietate garrantzitsu. Esan bezala, batzuk irudi bidez ikusterrezak dira, baina formalki frogatzen ere jakin behar dugu.

Proposizioa 2.1.9. *Izan bitez $A, B, C \subseteq X$. Honako propietate hauek betetzen dira:*

(i) $A \cup A = A$ *eta* $A \cap A = A$.

(ii) $A \cup \emptyset = A$ *eta* $A \cup X = X$

(iii) $A \cap X = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *eta* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(v) $A \cup B = B \cup A$ *eta* $A \cap B = B \cap A$.

(vi) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ *eta* $A \cap C \subseteq B \cap C$.

(viii) $A \cup (X \setminus A) = X$.

(ix) $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

(x) $(A^c)^c = A$.

(xi) $X^c = \emptyset$.

Froga. Pare bat baino ez ditugu frogatuko, hauek oso errazak direlako. Aski da gauza bakoitzak zer esan nahi duen ikustea. Froga dezagun adibidez (i) atalean bildurari dagokiona. $A \cup A = A$ dela frogatzeko bi partekotasunak ikusi behar ditugu $A \cup A \subseteq A$ dela eta $A \subseteq A \cup A$ dela.

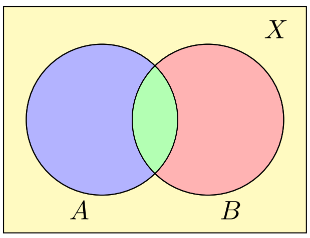
$\subseteq$: Has gaitezen $A \cup A \subseteq A$. Hau da, frogatu nahi dugu $\forall x \in X\, x \in A \cup A \Rightarrow x \in A$. Ohi bezala, har dezagun $x \in X$ multzo nagusiko edozein elementu eta demagun $x \in A \cup A$ dela. Bilduraren definizioagatik $x \in A$ edo $x \in A$ enuntziatua egia da. Baina enuntziatu bera denez, esaten ari garena da $x \in A$ egia izan behar dela. Beraz, frogatu dugu bildurako edozein A-n dagoela.

$\supseteq$: Ikus dezagun orain $A \subseteq A \cup A$ dela, hau da $x \in X$ edozein izanik, $x \in A$ izateak $x \in A \cup A$ inplikatzen duela. Izan bedi, beraz, $x \in X$ edozein elementu eta demagun $x \in A$ egia dela. Orduan egia al da $x \in A$ edo $x \in A$? Jakina, biak egia direlako (nahiz eta berez aski zen bakarra egia izatearekin, biak egia badira ere egia izango da). Beraz, frogatu dugu bigarren partekotasuna, eta ondorioz berdintza.

Esan bezala, irudiak oso lagungarri izan daitezke kasu batzuetan, baina ez beti! Adibidez, froga dezagun (iii) ataleko $A \cap \emptyset = \emptyset$. Ohartu kasu honetan irudiak ez digula laguntzen ez dakigulako multzo hutsa nola irudikatu! Ez dauka elementurik, beraz, ezin dugu marraztu. Kasu honetan beharrezkoa da froga modu formalean egitea. Berriz ere, bi partekotasunak ikusi behar ditugu:

$\subseteq$: Ikusi dezagun $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$ dela. Hau da, edozein $x \in A \cap \emptyset$ harturik, derrigorrez $x \in \emptyset$ betetzen dela. Gure hipotesia da x elementua A-n dagoela egia dela eta $\emptyset$-en dagoela ere bai. Baina multzo hutsak ez dauka elementurik, beraz $x \in \emptyset$ gezurra da beti. Eta konjuntzioa dugunez $x \in A$ eta $x \in \emptyset$ gezurra da. Oroitu gezurrak edozer inplikatzen duela. Bereziki, $x \in \emptyset$, eta beraz, partekotasun hori frogatuta geratzen da. $\supseteq$: Partekotasun hau ere antzera argudiatzen da. $\square$

Ikus dezagun orain osagarria nola portatzen den bildura eta ebakidurarekin. Has gaitezen Venn-en diagramak eginez eta ondoren ondoriozta eta froga ditzagun propietateak. Adibidez, pentsa dezagun zein erlazio duten bildura baten osagarriak eta bakoitzaren osagarriek.



A eta B multzoen bildura kolore urdin, berde eta gorriek osatzen dute. Beraz $A \cup B$-ren osagarria, $X - (A \cup B)$ horiz margotuta dagoen zatia da. Aldi berean, A-ren osagarria hori eta gorriz pintatuta dagoena da, eta B-rena hori eta urdinez dagoena. Horia soilik nahi badugu, aski da bietan aldi berean dagoenarekin, hau da, ebakidurarekin geratzea. Alegia $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$ erlazioa betetzen dela. Saiatu antzera ondorioztatzen zein den ebakiduraren osagarriaren eta osagarrien arteko erlazioa.

Ohartu, lotura edo antzekotasuna duela ukapenak disjuntzio eta konjuntzioekin duen harremanarekin. Izan ere, multzoei dagokionez, honakoak dira de Morganen legeak.

Teorema 2.1.10 (De Morganen Legeak)**.** *Izan bitez $A, B \subseteq X$. Orduan,*

(i) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$;

(ii) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

Froga. Froga dezagun lehenbizikoa eta utz dezagun bestea ariketa gisa. Ohi bezala, bi multzoen arteko berdintza ikusteko, bi partekotasunak frogatu behar ditugu. Hau da, $X \setminus (A \cap B) \subseteq (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ eta $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) \subseteq X \setminus (A \cap B)$.

$\subseteq$: Izan bedi $x \in X \setminus (A \cap B)$ multzo horretako edozein elementu. Orduan x ez dago $A \cap B$-n. Beste era batera esanda $x \in A \cap B$ enuntziatua gezurra da. Hau da x ez dago aldi berean A-n eta B-n. Beraz, gutxienez A edo B bietako batean ez dago x. Hau da $x \in X \setminus A$ edo $x \in X \setminus B$. Edo baliokidea dena $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

$\supseteq$: Har dezagun orain $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Orduan x ez dago A-n edo x ez dago B-n. Ikusi nahi dugu $x \in A \cap B$ esaldia gezurra dela. Izan ere, horrek frogatuko luke $x \notin A \cap B$ egia dela, edo baliokidea dena $x \in X \setminus (A \cap B)$. Baina bistakoa da $x \in A \cap B$ ezin dela egia izan, badakigulako $x \in A$ edo $x \in B$ gutxienez bietako bat gezurra dela. Beraz, inoiz ez dira biak aldi berean egia izango, eta $x \in A \cap B$ gezurra da. □

De Morganen legeez gain, banatze propietateak ere erabilgarriak izan ohi dira. Saia zaitezte marrazkiak egin eta propietateak betetzen direla ziurtatzen.

Propietateak 2.1.11 (Banatze-propietateak)**.** *Izan bitez $A, B, C \subseteq X$. Orduan*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Froga. Lehena frogatuko dugu eta bigarrena ariketa gisa utzi. Berdintza bat daukagunez, bi partekotasunak ikusi behar ditugu.

$\subseteq$: Har dezagun $x \in A \cap (B \cup C)$ elementu bat, edozein. Orduan, x aldi berean A-n eta $B \cup C$-n dago. Hau da, $x \in A$ da, eta horretaz gain, $x \in B$ edo $x \in C$. Ikus dezagun bi aukeretan ondoriozta dezakegula x badagoela $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ multzoan. Baldin eta $x \in B$ bada, orduan $x \in A \cap B$, A-n dagoela badakigulako. Beraz $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, izan ere, bilduran egoteko aski da batean egotearekin. Aldiz, $x \in C$ bada, orduan $x \in A \cap C$ izango dugu, eta beraz, aurreko lerroan argudiatu bezala, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ere beteko da.

$\supseteq$: Demagun orain, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dugula. Alegia, $x \in A \cap B$ edo $x \in A \cap C$ dugu. Berriz ere ziurtatuko dugu bi aukeretatik iristen garela nahi dugun emaitza ondorioztatzera. Baldin eta $x \in A \cap B$ bada, orduan $x \in A$ eta $x \in B$. Baina $B \subseteq B \cup C$ denez, $x \in B \cup C$ ere egia da, eta beraz $x \in A \cap (B \cup C)$. Aldiz, $x \in A \cap C$ baldin bada, $x \in A$ eta $x \in C$ dugu. Baina $C \subseteq B \cup C$ denez, x bilduran ere badago, eta beraz bietan dago aldi berean, A-n eta $B \cup C$-n. Hau da, $x \in A \cap (B \cup C)$. □

Biderkadura kartesiarra

Orain arte ikusitakoez gain, badago multzoen arteko beste eragiketa bat, ez dagoena lehen kapituluan ikusitako ukapen, konjuntzio eta disjuntzioekin lotuta. Eragiketa hori multzoen biderkadura kartesiar gisa da ezaguna, eta honela definitzen da:

Definizioa 2.1.12. A eta B-ren arteko *biderkadura kartesiarra* hau da:

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \text{ eta } b \in B\}.$$

Biderkaduraren elementuak bikote ordenatuak dira.

Eraikuntza hau erabat formala da. Gure multzo berriko elementuak parentesi eta koma artean A eta B-ko elementuak jarriz adierazten ditugu. Printzipioz, A eta B edozein multzo izan daitezke.

Adibideak 2.1.13. (i) Baldin eta $A = \{1, 2\}$ eta $B = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ multzoak baditugu, adibidez $(1, f)$ elementua $A \times B$ multzoko elementu bat da. Baina $(f, 1)$ adibidez ez, f ez dagoelako A-n eta 1 ez dagoelako B-n. Beraz, ohartu $A \neq B$ baldin bada $A \times B \neq B \times A$ dela.

(ii) Baldin eta $A = \{2, 3, 5\}$ eta $B = \{2, 4\}$ badira, orduan

$$A \times B = \{(2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$$

da.

(iii) Posible da A eta B multzo bera izatea, adibidez, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ izango litzateke. Kasu honetan $\mathbb{R}^2$ bidez ere adierazi ohi da.

Kasu honetan marrazkiek ez digute askorik lagunduko biderketa kartesiarrak ebakidura, bildura eta osagarriekin zein harreman duen jakiteko. Izan ere, ez dakigu $A \times B$ nola marraztu Venn-en diagrama batzuk egiteko moduan. Beraz, kasu honetan, propietateak derrigorrez modu formalean egiaztatu eta frogatu beharko ditugu.

Propietateak 2.1.14. *Izan bitez $A, B, C, D \subseteq X$. Biderketa kartesiarrak honako propietate hauek betetzen ditu:*

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(iii) $C \neq \emptyset$ *bada eta* $A \times C = B \times C$ *badira, orduan* $A = B$,

(iv) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$,

(v) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

(vi) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$;

(vii) *baldin* $B \subseteq C$ *bada, orduan* $A \times B \subset A \times C$,

(viii) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$,

(ix) A, B, C *eta* D *multzo ez-hutsak badira, orduan,* $A \times B \subseteq C \times D$ *da baldin eta soilik baldin* $A \subset C$ *eta* $B \subset D$ *badira.*

Froga. Gehienak errezak dira, gauza bakoitzak zer esan nahi duen idaztea besterik ez delako. Egin dezagun hala ere (vi)-a. Hasteko, ohartu $A \times B \subseteq X \times X$ dugula, eta beraz, osagarria hartzerakoan $X \times X$ multzoarekiko ari garela hartzen. Ikus ditzagun bi partekotasunak:

$\subseteq$: Izan bedi $(x,y) \in X \times X$ edozein elementu non $(x,y) \notin A \times B$. Bikotea $A \times B$-n egoteko beharrezkoa da "koordenatu" bakoitza bere multzoan egotea. Beraz, ez egoteko aski da bietako bat ez egotea dagokion lekuan. Hau da, $x \notin A$ edo $y \notin B$. Orduan, hiru aukera dauzkagu: $x \notin A$ baina $y \in B$ gertatzea, hau da $(x,y) \in A^c \times B$ eta bereziki $(x,y) \in A^c \times B \subseteq (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$. Bigarren aukera da $x \in A$ eta $x \notin B$, eta kasu horretan $(x,y) \in A \times B^c$ izango genuke, eta beraz bildura handian ere bai. Bukatzeko, posible da $x \notin A$ eta $x \notin B$ gertatzea, eta orduan $(x,y) \in A^c \times B^c$ izango genuke, eta ondorioz bilduran ere bai.

$\supseteq$: Orain, $(x,y) \in (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$ baldin bada, hiru aukera posible dauzkagu. Ikusten badugu aukera guztietan gai garela ondorioztatzeko $(x,y) \in (A \times B)^c$ betetzen dela bukatuta egongo da froga. Lehen aukera $(x,y) \in A^c \times B$ multzoan egotea da. Orduan x ez dagoenez A-n, (x,y) ezin da $A \times B$-n egon, eta beraz, bere osagarrian dago. Beste bi kasuak antzera egiaztatzen dira, eta frogapena bukatuko litzateke hala.

□

2.1.3 Multzoen multzoak

Orain arte multzoak elementuz osatutako objektu gisa ikusi ditugu, eta eman ditugun adibideetan hala zen. Baina har genitzake ere multzoak zeinen elementuak multzoak diren aldi berean. Esate barerako, defini genezake ondoko multzoa

$$S = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid 3 \in A\}.$$

Multzo honetako elementuak lirateke $\mathbb{Z}$-ko azpimultzoak zeintzuk 3 zenbakia barnean duten. Horrela $\{1,2,4,5\} \notin S$ baina $\mathbb{N} \in S$. Ohartu orain ez dugula azpimultzoetarako sinboloa erabiltzen, izan ere, $\mathbb{N}$ ez da S-ren azpimultzoa, S-ko elementua baizik!

Multzo baten parteen multzoa

Multzo batetik abiatuz beti sor daitekeen multzoen multzo bat da *parteen multzoa* deritzona. Hain zuzen ere, har genitzake multzo horren azpimultzo guztiek osatzen duten multzoa. Hori da hain zuzen ere parteen multzoa. Defini dezagun formalki:

Definizioa 2.1.15. Izan bedi $A \subseteq X$ edozein multzo. Orduan, *A-ren parteen multzoa*, $\mathcal{P}(A)$ bidez adieraziko duguna, ondoko multzoa da:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \subseteq X \mid B \subseteq A\}.$$

Adibidea 2.1.16. Demagun $A = \{1,2,3\}$ multzoa dugula. Orduan A-ren parteen multzoak A-ren azpimultzo posible guztiak ditu bere baitan. Hain zuzen ere, hau litzateke multzo hori

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Ohartu A multzoak 3 elementu dauzkala eta $\mathcal{P}(A)$-k zortzi. Hain zuzen ere 2^3. Aurrerago ikusiko dugu ez dela kasualitatea eta orokorrean n elementuko multzo baten azpimultzo ezberdin kopurua 2^n dela.

Familia indizedunen multzoak

Multzoen multzoak sortzeko beste aukera bat zuzenean eraikitzea da. Adibidez, baldin eta $A_1, \ldots, A_{10}$ hamar multzo badauzkagu izen hori eman diegunak hurrenez hurren, multzo horiek elementutzat dauzkan multzoa osa dezakegu, besterik gabe $\{A_1, \ldots, A_{10}\}$ izango dena. Kasu honetan multzoak 1-etik 10-era indexatu ditugu, baina orokorrean nahi dugun indize multzoarekin eraiki dezakegu halako multzoen multzoa. Ohikoa da kasu hauetan multzoen "bilduma" edo "familia"ri buruz hitz egitea, "multzoen multzo" nahasgarri suerta daitekeelako, baina finean hori besterik ez da.

Definizioa 2.1.17. Izan bedi I multzo bat, indizeen multzoa esango dioguna. Demagun $i \in I$ bakoitzerako A_i multzoa daukagula. Orduan, $\{A_i\}_{i\in I}$ multzoa *I-ren bidez indexatutako multzoen familia* da.

Lehenago bi edo hiru multzorekin egin bezala, indizedun familiekin ere egin ditzakegu eragiketak.

Definizioa 2.1.18. Izan bedi $\{A_i\}_{i\in I}$ multzo-familia indizeduna. Honako multzo hauek definitzen dira:

(i) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ *bildura orokortua* da, eta;

(ii) $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ *ebakidura orokortua.*

Proposizioa 2.1.19. *Banatze-propietatea eta De Morganen legeak betetzen dira eragiketa orokortuekin ere, hau da,*

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i), \quad B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i),$$

eta

$$X - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X - A_i), \quad X - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X - A_i).$$

Ariketa 2.i. Saiatu aurreko proposizioaren frogapen formala idazten

Ohartu I familia indizeduna finitua denean, esate baterako $I = \{1, \ldots, n\}$ definizioko bildura eta ebakidura orokortuak lehen bi edo hiru multzorekin egiten genuena besterik ez direla. Hau da

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{a \in X \mid a \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

eta

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{a \in X \mid \exists i = 1, \ldots, n:\ a \in A_i\}.$$

Bildura eta ebakidura orokortuekin egin dugun modu berean biderketa kartesiar orokortua ere defini daiteke. Hala ere, definizio hau konplexuagoa da eta ez dugu edozein I-rentzako emango, baizik eta I finitua den kasuan. [8]

[8] Kasu infinituaren adibide bat, ezaguna egingo zaizuena, $I = \mathbb{N}$ eta $A_n = \mathbb{R}$ deneko kasua da. Izan ere, orduan $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ biderkadura kartesiar infinitu orokortua ez da $\mathbb{R}$-ko segiden multzoa besterik.

Definizioa 2.1.20. Baldin eta $\{A_i\}_{i \in I}$ multzo-familia indizeduna badugu, $I = \{1, \ldots, n\}$ izanik *biderkadura kartesiar orokortua* honela definitzen da:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Biderkadurarako $\prod_{i=1}^{n} A_i$ notazioa ere erabiltzen da.

Oharra 2.1.21. Baldin $A_i = A$ bada, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, $A \times \cdots \times A$ idatzi ordez, A^n idatz daiteke. Esaterako, n dimentsioko espazioko puntuak koordenatu kartesiarren bidez $\mathbb{R} \times \overset{n}{\ldots} \times \mathbb{R}$-ko n-koteekin identifikatzen ditugu eta espazioa adierazteko $\mathbb{R}^n$ idazten dugu.

2.2 Funtzioak

2.2.1 Funtzioen definizioa

Funtzioen kontzeptua matematikaren alor guztietan ageri da: geometrian, aljebran, probabilitatean... Eta bereziki kalkuluan. Izan ere, kalkuluak funtzioen izaera aztertzen du nagusiki. Orain arte ere, funtzioekin sarri aritu zarete lanean. Ziur aski, kalkuluari loturik, erabili izan dituzuen funtzioak funtzio errealak izan dira, hau da, zenbaki erreal bati beste zenbaki erreal bat esleitzen dioten funtzioak. Adibidez,

$$f(x) = 2x + 8,\ f(x) = x^3 \text{ edo } f(x) = sin(x).$$

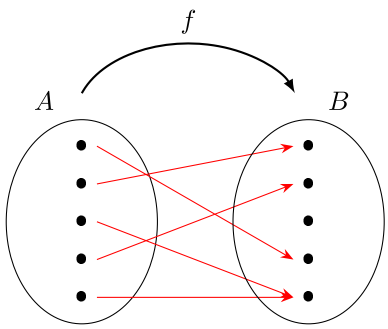
Funtzioaren kontzeptua, baina, $\mathbb{R}$-tik $\mathbb{R}$-ra doazenena baino askoz zabalagoa da. Izan ere, $\mathbb{R}$-ren lekuan edozein multzo jartzeko aukera izango dugu. Horrela, $\mathbb{R}$-tik $\mathbb{R}$-rako funtzioen propietate garrantzitsuenak orokortuko ditu funtzioaren kontzeptuak. Zein dira propietate garrantzitsu horiek? Lehena da zenbaki erreal bat emanda beti dakigula bere irudia kalkultatzen. Horretarako erregela bat ematen digu goiko hiru adibideetako bakoitzak. Horretaz gain, zenbaki erreal bakoitzari beste BAKAR bat esleitzen dio. Ez dugu 2 zenbakia, adibidez, bi leku desberdinetara bidaltzen. Bada, bi propietate hauek aski izango dira funtzio bat zer den definitzeko.

Definizioa 2.2.1. Izan bitez A eta B bi multzo ez-huts. Orduan, A-tik B-ra doan *funtzio* edo *aplikazio*[9] bat erregela bat da, zeinak A-ko **edozein** elementuri B elementu **bakar** bat esleitzen dion. Kasu honetan A multzoari f-ren *eremua* esaten zaio eta B-ri f-ren *koeremua*. Honela adieraziko dugu $f : A \to B$ non $a \in A$ bakoitzerako $f(a) = b$ idatziko dugun b izanik a-ri esleitu diogun irudia. Kasu honetan b a elementuaren *irudia* dela esango dugu eta a berriz b-ren *aurreirudia* dela.

Ohartu, definiziotik, A-ko edozein elementuk derrigor B multzoko elementu bat eta bakar bat daukala esleituta. Funtzio batean pentsa genezake A multzoa dela funtzio horren "input"en multzoa balitz bezala, eta B multzoak osatzen duela funtzioaren "output" posibleen multzoa.

[9]Bi hitz hauek sinonimo gisa erabiliko ditugu guk. Hala ere, matematikari batzuek funtzio hitza eremu eta koeremua zenbaki erreal edo konplexuak direnerako erreserbatzen dute eta gainerakoei aplikazio esaten diete. Guretzako biek esanahi bera izango dute.

Behin $a \in A$ elementu bat izanik ez da horren garrantzitsua jakitea nola topatzen dugun $f(a)$, edo nola dagoen definituta. Kontzeptualki garrantzia daukana da badakigula existitzen dela eta bakarra dela. Honelako irudien bitartez pentsa ditzakegu funtzioak:



Ohartu koeremuaren kasuan, hau da, B-ren kasuan, posible dela punturen batera gezirik ez iristea. Hau da, ez dago A-ko elementurik zeinari B-ko elementu hori esleitu zaion. Eta aldi berean posible da B-ko punturen batera gezi bat baino gehiago iristea. Hori bai, funtzioaren definiziotik posible ez dena da A-ko punturen batetik gezirik ez abiatzea, ezta gezi bat baino gehiago abiatzea ere. Elementu bakoitzak derrigorrez irudi bat duelako, eta gainera bakarra.

Adibideak 2.2.2. (i) Izan bitez $A = \{1, 2, 3\}$ eta $B = \{1, 4, 5, 8\}$ multzoak. Orduan $f : A \to B$ definitu nahi badugu aski da A-ko elementu bakoitza B-ko zeinetara bidali nahi dugun esatea. Aukera bat, adibidez, $f(1) = 4$, $f(2) = 1$ eta $f(3) = 8$ izatea da. Baina aukera gehiago ere badaude, noski! Adibidez erabaki genezakeen hirurak elementu berera bidaltzea. Esate baterako, definitzea $g : A \to B$ non $g(1) = g(2) = g(3) = 4$ den. Eta ondo definitutako funtzio bat izango litzateke hori ere.

(ii) Izan bedi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa honela definituta dagoena $f(x) = x^2$. Ohartu adibidez, kasu honetan ere $\mathbb{R}$-ko elementu bakoitzak baduela irudi bat eta irudi hori bakarra dela. Aldiz, badaude $\mathbb{R}$-ko elementuak (zenbaki negatiboak hain justu) inoren irudi ez direnak. Eta badira $\mathbb{R}$-ko elementuak (zenbaki hertsiki positiboak) elementu bat baino gehiagoren irudi direnak (zehazki birenak).

Badira matematikan eremu eta kontestu ezberdinetan baliagarriak izaten diren zenbait aplikazio. Horietako bat, esate baterako identitate aplikazioa da. Hitzak berak dion gisan, edozein elementu bere identikora bidaltzen duen aplikazioa da. Jakina, hori posible izateko eremua eta koeremua multzo bera izan behar dira. Beraz, A multzo baten gaineko identitate aplikazioa ondokoa litzateke:

$$\begin{aligned} 1_A : A &\to A \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

Notazioari dagokionez, 1_A-ren ordez Id_A ere idatzi ohi da batzuetan. Aplikazio honen gisa, non nahi aurkitu ahalko dituzuen zenbait aplikazio garrantzitsu zerrendatzen dira ondorengo adibideetan.

Definizioa 2.2.3. Izan bitez A eta B bi multzo. Ondoko aplikazioek izen berezia dute:

(i) *Identitate funtzioa:* $1_A\colon A \to A$, non $1_A(a) = a$ den.

(ii) *Partekotasun funtzioa:* $S \subseteq A$ bada, $i_S\colon S \to A$, $i_S(s) = s$.

(iii) *Funtzio konstantea:* $b_0 \in B$ finko baterako, $f_{b_0}\colon A \to B$, non $f_{b_0}(a) = b_0$ den, $a \in A$ guztietarako.

(iv) *S multzoaren funtzio karakteristikoa:* $S \subseteq A$ bada, $\chi_S\colon A \to \{0,1\}$ non

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 0, & a \notin S \text{ bada,} \\ 1, & a \in S \text{ bada.} \end{cases}$$

(v) $f\colon A \to B$ eta $S \subseteq A$ badira, *f-ren S multzorako murrizketa,* $f|_S\colon S \to B$, $f|_S(s) = f(s)$ definitzen da, $s \in S$ guztietarako.

Ariketa 2.ii. Hartu ezagunak zaizkizuen funtzio konkretuak eta beraien eremu eta koeremuko azpimultzoak eta eraiki beraietatik abiatuz (posible den kasuetan) goian ageri zaizkizuen funtzioak.

Bi funtzio berdinak izango dira baldin eta biek eremu eta koeremu bera badute, eta horretaz gain elementu bakoitzaren irudia bera bada bien bidez. Hau da,

Definizioa 2.2.4. Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : C \to D$ bi funtzio. Orduan f eta g funtzioak berdinak direla esango dugu eta $f = g$ adierazi, baldin eta $A = C$ eta $B = D$ badira eta $f(a) = g(a)$ baldin bada $a \in A$ guztietarako.

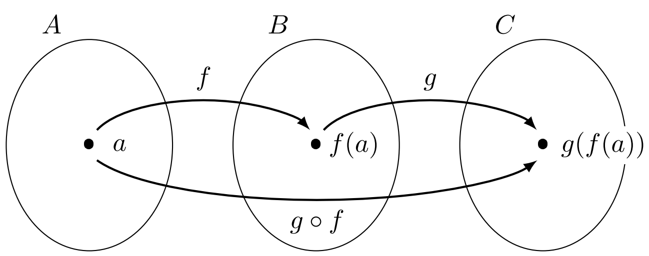
Funtzioen konposaketa

Baldin eta funtzio baten koeremua eta beste funtzio baten eremua multzo bera badira, funtzio bat bestearen ondoren aplika dezakegu. Horrek funtzio berri bat emango digu, bi funtzio horien konposizioa izango dena.

Definizioa 2.2.5. Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : B \to C$. Orduan *f eta g-ren konposaketa* funtzio berri bat da, $g \circ f$ bidez adieraziko duguna, zeinen eremua A den, koeremua C eta $a \in A$ bakoitzerako honela definituta dagoena:

$$g \circ f(a) = g(f(a)).$$

Grafikoki honela pentsa dezakegu funtzioen konposaketa.



Adibideak 2.2.6. (i) Izan bitez $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ eta $g(x) = 2x + 8$. Orduan $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 8$ da. Ohartu kasu honetan g-ren koeremua eta f-ren eremua ere berdinak direla, eta beraz, $f \circ g$ ere defini dezakegula. Kasu honetan $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+8) = (2x+8)^2 = 4x^2+32x+64$. Beraz, argi dago oro har konposaketaren ordenak garrantzia duela eta $f \circ g \neq g \circ f$.

(ii) Izan bedi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ non $f(n) = \cos(\pi n)$ eta $g : \mathbb{R} \to \{-2, 2\}$ non

$$g(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \text{ bada,} \\ 2, & x \geq 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

Kasu honetan konposaketa bakarra egin dezakegu, lehenik f aplikatzen duena eta ondoren g, hain zuzen ere $g \circ f$. Funtzio hau $\mathbb{N}$-tik $\{-2, 2\}$ multzora doan funtzioa izango da eta honela egongo da definituta:

$$g \circ f(n) = \begin{cases} -2, & \cos(\pi n) < 0 \text{ bada,} \\ 2, & \cos(\pi n) \geq 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

Kalkula ditzagun adibidez zenbaki batzuen irudiak: $g \circ f(1) = -2$ izango da, izan ere, $\cos(\pi) = -1 < 0$ da. Aldiz, $\cos(2\pi) = 1 \geq 0$ denez, $g \circ f(2) = 2$ izango da. Ohartzen bagara, zenbaki natural bakoiti guztietarako izango dugu kosinua -1 eta bikoitietarako 1. Beraz, gure funtzio berria beste funtzio honen berdina izango da; $h : \mathbb{N} \to \{-2, 2\}$ non

$$h(n) = \begin{cases} -2, & n \text{ bakoitia bada,} \\ 2, & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

Edo baita beste honen berdina ere, $\phi : \mathbb{N} \to \{-2, 2\}$ non

$$\phi(n) = 2\cos(\pi n).$$

Ohikoa da funtzioentzako f, g, h letrak erabiltzea, bai letra xehez zein larriz. Bestetik, letra grekoak ere erabili ditzakegu funtzioak denotatzeko, hala nola λ, φ, γ... Ikus ditzagun, bukatzeko, konposaketak betetzen dituen zenbait propietate:

Proposizioa 2.2.7. *Izan bitez $f : A \to B$, $g : B \to C$ eta $h : C \to D$ aplikazioak. Orduan,*

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(ii) $f \circ 1_A = f$ *eta* $1_C \circ g = g$;

Ariketa 2.iii. Eman proposizio honen froga.

2.2.2 Irudia eta aurreirudia

Ikusi dugunez, koeremua ez dator beti bat funtzioak hartzen dituen balioekin. Izan ere, egon litezke koeremuan elementu batzuk inoren irudi ez direnak. Hala ere, jakina, norbaiten irudi diren elementu guztiak daude koeremuaren barruan. Koeremuaren azpimultzo horri izen bat ematea interesatuko zaigu.

Definizioa 2.2.8. Izan bedi $f : A \to B$ funtzioa. Orduan *f-ren irudia* edo *f-ren irudien multzoa*, $\operatorname{Im} f$ edo $f(A)$ bidez adieraziko duguna, ondoko multzoa da

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ zeinentzako } b = f(a) \text{ den}\}.$$

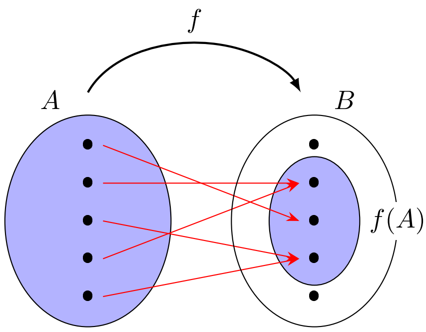
Bestetik, *f-ren grafoa* esaten zaio $\{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$ multzoari.

Eremu osoarentzat definitu dugun hau A-ren edozein azpimultzorentzako defini dezakegu orokorrean.

Definizioa 2.2.9. Izan bedi $f : A \to B$ funtzioa eta $S \subseteq A$ azpimultzoa. Orduan *S-ren f-ren bidezko irudia* edo zuzenean *S-ren irudia*, $f(S)$-ren bidez adieraziko dugu, eta ondoko multzoari esaten zaio:

$$f(S) = \{b \in B \mid \exists s \in S \text{ zeinentzako } b = f(s) \text{ den}\}.$$

Honela irudika dezakegu grafikoki funtzio baten irudia:



Adibideak 2.2.10. Begira diezaiegun Adibideak 2.2.2 atalean aztertutako adibideei eta ikus ditzagun zein diren funtzioen irudiak eta azpimultzo batzuenak:

(i) Lehen f horretan, $f(A) = \{1, 4, 8\}$ multzoa litzateke, eta bigarren adibidearen kasuan, dena 4-ra bidali dugunez, $g(A) = \{4\}$. Aldiz, A-ren $S = \{1, 3\}$ azpimultzoa hartuko bagenu, $f(S) = \{4, 8\}$ izango genuke, eta $g(S) = \{4\}$ orain ere.

(ii) Bigarren adibidearen kasuan, aipatu bezala $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ tartea izango da. Aldiz, $S = [-3, 8) \subseteq \mathbb{R}$ azpimultzoaren irudia kalkulatuko bagenu $f(S) = [0, 64)$ tartea izango litzateke.

Eremuaren irudia eta eremuko azpimultzoen irudia definitu ditugun bezala, galde genezake zein den B-ko elementuetara edo B-ko azpimultzo batera doazen A-ko elementuen multzoa.

Definizioa 2.2.11. Izan bedi $f : A \to B$ eta $T \subseteq B$. Orduan *T-ren aurreirudia* edo *T-ren aurreirudien multzoa*, $f^{-1}(T)$-ren bidez adieraziko duguna, ondoko multzoa da:

$$f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Oharra 2.2.12. Ohartu aurreko definizioan $T = B$ daukagunean $f^{-1}(B) = A$ lortzen dugula beti. Izan ere, A-ko elementu guztiek dute irudiren bat, eta irudi hori koeremuan egon behar denez, $a \in A$ guztiek betetzen dute $f(a) \in B$ izatea.

Atal honekin bukatzeko, azter dezagun zein portaera duten irudiak eta aurreirudiak azpimultzoen eragiketekiko; alegia, bildura, ebakidura eta diferentziarekiko.

Has gaitezen irudiarekin.

Proposizioa 2.2.13. *Izan bedi $f : A \to B$ aplikazioa. Eta $S_1, S_2 \subseteq A$ edozein bi azpimultzo. Orduan*

(i) $f(\emptyset) = \emptyset$ *eta* $A \neq \emptyset$ *bada, orduan* $f(A) \neq \emptyset$,

(ii) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow f(S_1) \subseteq f(S_2)$,

(iii) $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$,

(iv) $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$,

(v) $f(S_1) - f(S_2) \subseteq f(S_1 - S_2)$. *Bereziki,* $f(A) - f(S_1) \subseteq f(A - S_1)$.

Froga. Egin ditzagun proposizio honetako zenbait atalen frogak:

(ii): Demagun $S_1 \subseteq S_2$ dela dakigula eta ondoriozta dezagun $f(S_1)$ multzoko edozein elementu $f(S_2)$ dagoela. Izan bedi, bada $b \in f(S_1)$ edozein. Ohartu b izena ematen diogula badakigulako koeremuko elementu bat izango dela. Definizioz, $f(S_1)$-en egoteagatik, existitzen da elementu bat $s \in S_1$ zeinentzako $f(s) = b$ den. Baina orain, badakigu $s \in S_1 \subseteq S_2$ dela, hau da, $s \in S_2$ daukagu. Beraz, existitzen da s elementua S_2-n zeinentzako $f(s) = b$ den, eta hori $b \in f(S_2)$-ren definizioa da.

(iii) Kasu honetan berdintza daukagunez bi partekotasunak frogatu behar ditugu. Izan bedi $b \in f(S_1 \cup S_2)$, orduan existitzen da $s \in S_1 \cup S_2$ non $f(s) = b$ den. Baldin eta $s \in S_1$ bada, orduan $f(s) \in f(S_1) \subseteq f(S_1) \cup f(S_2)$ eta bukatuko genuke. Modu paraleloan iristen gara ondorio berera $s \in S_2$ baldin bada. Bietako bat egia denez, partekotasun hau frogatuta geratzen da. Beste partekotasuna frogatzeko aski da aurreko atala eta bilduraren propietateak erabiltzea. Izan ere $S_i \subseteq S_1 \cup S_2$ denez $i = 1, 2$-rentzat, badakigu $f(S_i) \subseteq f(S_1 \cup S_2)$ (aurreko atalari esker). Bestalde bi azpimultzo multzo handiago baten barruan badaude, beraien bildura ere multzo horren barruan egongo da.

(iv): Har dezagun $b \in f(S_1 \cap S_2)$ eta ikus dezagun badagoela $f(S_1) \cap f(S_2)$ multzoan. Definizioz, $b \in f(S_1 \cap S_2)$ izateak esan nahi du existitzen dela $s \in S_1 \cap S_2$ zeinentzako $f(s) = b$ den. Orain, $s \in S_1 \cap S_2$ izateagatik bietan dago. Hau da, existitzen da $s \in S_1$ zeinentzako $f(s) = b$ den eta existitzen da $s \in S_2$ zeinentzako $f(s) = b$ den. Aurrekoa, definizioz da $b \in f(S_1)$ eta $b \in f(S_2)$, eta beraz b ebakiduran dago.

(v): Izan bedi $b \in f(S_1) - f(S_2)$, hau da $b \in f(S_1)$ eta $b \notin f(S_2)$. Hasteko, badakigu existitzen dela $s \in S_1$ zeinentzako $f(s) = b$ den. Gustatuko litzaiguke esatea $s \in S_1 - S_2$ dela, izan ere horrela ondorioztatuko genuke $b \in f(S_1 - S_2)$ dela. Eta hala izan behar da, izan ere, $s \in S_2$ balitz $b \in f(S_2)$ izango genuke eta hori kontraesanean legoke $b \notin f(S_2)$-rekin.

□

Oharra 2.2.14. Matematikan enuntziatu batean berdintza bat egon zitekeen lekuan partekotasun bat ikusten dugunean (edo baliokidetasun bat egon zitekeen lekuan inplikazio bat) zer pentsatu behar luke matematikariak: "zer gertatzen da beste partekotasunarekin?" Bi aukera daude, edo ez da orokorrean egia edo izan liteke baina momentuz inork ez du frogatzerik lortu. Ikus dezagun goiko partekotasunen kasuan ez dela frogatzea zailak direlako, ezinezkoak direlako baizik. Alegia, ez direla egia orokorrean. Gogoratu zerbait egia ez dela frogatzeko aski dela kontradibide bat bilatzea. Goiko proposizioan bi kasutan dauzkagu partekotasunak soilik alde batera eta kasu batean norantza bakarreko inplikazioa. Eraiki dezagun kasu bakoitzerako kontradibide bana:

(ii): Kasu honetan ikusi nahi dugu $f(S_1) \subseteq f(S_2)$ izateak ez duela orokorrean $S_1 \subseteq S_2$ denik inplikatzen. Kontradibidea eraikitzeko, beraz, bi azpimultzo topatu nahiko ditugu, ez dagoena bata bestearen parte; baina zeinen irudien multzoek hori betetzen duten. Honelako adibideak pentsatzerako orduan errezena ahalik eta elementu gutxienekin lan egitea da. Aukera dezagun, adibidez eremu gisa soilik bi elementu dauzkan multzoa $A = \{1, 2\}$ eta har dezagun koeremu gisa adibidez $B = \{3, 4\}$. Nahi ditugu A-ren bi azpimultzo ez daudenak bata bestearen parte. Adibidez, $S_1 = \{1\}$ eta $S_2 = \{2\}$. Orain, beraien irudiak bata bestearen parte izatea nahi dugu. Horretarako aski izango da 1 eta 2 elementuek irudi bera izatea. Beraz, defini dezagun f funtzioa honela: $f(1) = f(2) = 3$. Ohartu eremuko elementu bakarrak 1 eta 2 direnez ez dugula beste irudirik zehaztu behar f definituta egon dadin. Orain bistakoa da $f(S_1) = \{3\} = f(S_2)$ bata bestearen parte direla (are gehiago, berdinak dira) eta S_1 ez da S_2-ren parte.

(iv): Orain ikusi nahi dugu ez dela beti betetzen $f(S_1) \cap f(S_2) \subseteq f(S_1 \cap S_2)$ denik. Hau da, topatu nahi ditugu bi azpimultzo eta funtzio bat zeinentzako badagoen elementuren bat S_1 eta S_2-ren irudien ebakiduran, baina ez dagoen ebakiduraren irudian. Horretarako aski da bi multzo hartzea bakoitzak bestean ez duen elementu bat duena. Goiko adibide bera baliagarri izango zaigu. Izan ere, goiko adibidean S_1-ek badu S_2-k ez daukan elementu bat, 1-a. Eta alderantziz, S_2-k badu S_1-ek ez duen elementu bat 2-a. Horiek biei irudi bera esleitzen badiegu, irudiko elementua egongo da $f(S_1)$ ebaki $f(S_2)$-n, baina ez badugu beste elementurik hara bidaltzen, ez da egongo $S_1 \cap S_2$-ren irudian. Estrategia orokorrago azaldu badugu ere, konproba ezazue aurreko adibidearen kasuan balio duela.

(v): Zuzenean adibidea emango dugu. Hartu $A = \{1, 2\}$, $S_1 = A$ eta $S_2 = \{1\}$. Orain $B = \{3\}$ izanik, $f(1) = f(2) = 3$ definituz, $f(S_1 - S_2) = f(\{2\}) = \{3\} \not\subseteq f(S_1) - f(S_2) = \{3\} - \{3\} = \emptyset$.

Ariketa 2.iv. Eman aurreko hiru ataletako bakoitzerako beste bi adibide ezberdin. Posible al da halako adibiderik eraikitzea elementu ezberdinei irudi bera esleitu gabe?

Ikus ditzagun orain aurreirudiak dituen propietateak:

Proposizioa 2.2.15. *Izan bedi $f : A \to B$ aplikazioa. Eta $T_1, T_2 \subseteq B$ koeremuko edozein bi azpimultzo. Orduan*

(i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ *eta gerta daiteke* $T \subseteq B$ *eta* $f^{-1}(T) = \emptyset$,

(ii) $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow f^{-1}(T_1) \subseteq f^{-1}(T_2)$,

(iii) $f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$,

(iv) $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$,

(v) $f^{-1}(T_1) - f(T_2) = f^{-1}(T_1 - T_2)$. *Bereziki,* $A - f^{-1}(T_2) = f^{-1}(B - T_2)$.

Ariketa 2.v. Eman proposizioaren frogapen formala.

Ohartu lehen partekotasunak geneuzkan lekuan orain berdintzak dauzkagula. Gogoratzeko esan ohi da aurreirudia irudia baino "hobeto portatzen" dela multzoen eragiketekiko.

Bukatzeko ikus dezagun zer gertatzen den eremuko multzo baten irudiaren aurreirudiarekin eta alderantiz, koeremuko baten aurreirudiaren irudiarekin.

Proposizioa 2.2.16. *Izan bedi* $f : A \to B$ *eta izan bitez* $S \subseteq A$ *eta* $T \subseteq B$ *eremu eta koeremuko bi azpimultzo hurrenez hurren. Orduan,*

(i) $S \subseteq f^{-1}(f(S))$,

(ii) $f(f^{-1}(T)) = f(A) \cap T \subseteq T$,

(iii) $f(S \cap f^{-1}(T)) = f(S) \cap T$.

Ariketa 2.vi. Eman proposizioaren frogapena eta kontradibide bana zeinentzako ageri diren partekotasunak ez diren berdintzak.

2.2.3 Funtzio injektibo eta supraiektiboak

Ikusi dugun gisan, koeremuaren aurreirudia beti da eremu osoa. Aldiz, posible da eremuaren irudiak koeremu osoa ez estaltzea eta koeremuaren azpimultzo propio bat izatea. Bestetik, Proposizioa 2.2.13-en ikusi genuen gisan, irudiak ez du izan lezakeen portaerarik onena multzoekiko. Hori gertatzearen arrazoi nagusia zen, eta kontradibideak eraikitzeko hori baliatu genuen, posible zela elementu ezberdinek irudi bera izatea. Atal honetan ikusiko dugu hori ekiditen badugu zer gertatzen den. Bi portaera hauek garrantzitsuak izango dira funtzioak erabiltzerako orduan, eta beraz, izen bereziak merezi dituzte.

Definizioa 2.2.17. Izan bedi $f : A \to B$ funtzioa. Orduan,

(i) Baldin eta A-ko elementu ezberdinek irudi ezberdinak badituzte, orduan f funtzioa *injektiboa* dela diogu. Hau da, baldin eta

$$\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

(ii) Baldin eta eremuaren irudiak koeremu osoa hartzen badu, orduan f funtzioa *supraiektiboa* dela diogu. Hau da, $f(A) = B$ baldin bada, edo

$$\forall b \in B,\ \exists\, a \in A \text{ non } f(a) = b \text{ den.}$$

(iii) Baldin eta f aldi berean injektiboa eta supraiektiboa bada, orduan f bijektiboa dela diogu. Baliokideki,

$$\forall b \in B,\ \exists!\, a \in A,\ \text{non } f(a) = b.$$

Oharra 2.2.18. Ohar gaitezen $P \Rightarrow Q$ eta $\neg Q \Rightarrow \neg P$ baliokideak izateagatik injektibotasunaren definizioaren baliokidea dela ondoko baldintza

$$\forall a_1, a_2 \in A,\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

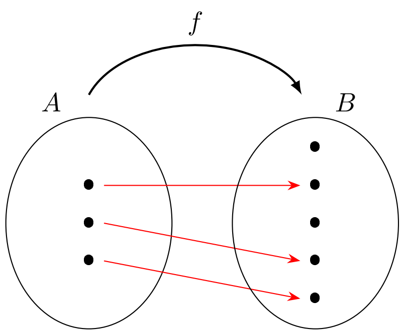
Kasu batzuetan propietate hau aztertzea errezago egingo zaigu definizioan emandakoa aztertzea baino, eta beraz, erabilgarria izango da.

Kontuz ibili! Izan ere, $\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$ enuntziatuak ez dio ezer injektibotasunari buruz! Hau funtzio izatearen definizioa baino ez da. Izan ere, enuntziatu honek dion bakarra da ez dagoela baimenduta elementu berdina irudi ezberdinetara bidaltzea. Eta hori da hain zuzen ere f funtzio izatearen baldintzetako bat.

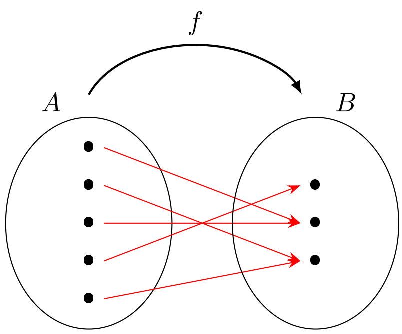
Bukatzeko, ohartu bijektibotasunaren bigarren baldintza baliokidea dela biak betetzearekin. Bistakoa da supraiektibotasunaren baldintza inplikatzen duela, izan ere, koeremuko elementu bakoitzarentzako existitzen da eremuko bat zeinak koeremuko elementu hori daukan iruditzat. Bestalde, elementu hori BAKARRA izateak injektibotasuna inplikatzen du. Zergatik? Demagun A-ko bi elementu dauzkagula, a_1 eta a_2. Ikusi nahi dugu $f(a_1) = f(a_2)$ izateak $a_1 = a_2$ izatera behartzen gaituela. Eta hori existentzialeko bakartasun horrek ematen digu, izan ere $f(a_1) = f(a_2) \in B$ bada eta B-ko elementu bakoitzak aurreirudi bakarra badu, derrigorrez a_1 eta a_2-k elementu bera izan behar dute.

Grafikoki honela pentsa ditzakegu funtzio injektibo, supraiektibo eta bijektiboak:

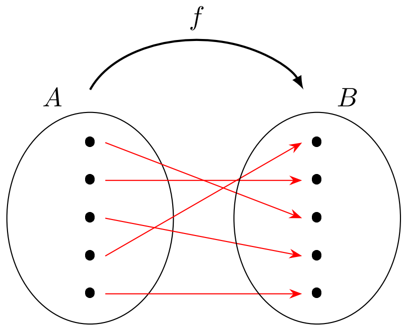
- Injektiboa:



- Supraiektiboa:



- Bijektiboa:



Adibideak 2.2.19. (i) Izan bedi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ non $f(n) = 2n+8$ den. Funtzio hau injektiboa da, baina ez da supraiektiboa.

(ii) Izan bedi $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ non $f(x) = x^2$ den. Funtzio hau ez da injektiboa, baina supraiektiboa da.

(iii) Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x, y) = (y+x, x-y)$. Funtzio hau bijektiboa da.

Ariketa 2.vii. Saiatu aurreko hiru adibideetako enuntziatuak formalki frogatzen.

Funtzio bat injektibo edo supraiektibo (edo biak) izatearen abantaila edo garrantzietako bat da irudi eta aurreirudiak multzoekiko zuten portaera orokorra hobetu egiten dela. Ikusi genuen, adibidez, Proposizioa 2.2.13-n nola berdintza izan zitezkeen kasu batzuetan partekotasuna baino ezin genuen ziurtatu. Baldin eta gure funtzioak injektibo edo supraiektibo izateko propietateak betetzen baditu arazo gutxiago izango ditugu kasu batzuetan.

Proposizioa 2.2.20. *Izan bedi $f\colon A \to B$ aplikazioa.*

(i) $T = f(f^{-1}(T))$*,* $T \subseteq B$ *guztietarako, baldin eta soilik baldin* f *supraiektiboa bada.*

(ii) $B - f(S) \subseteq f(A - S)$*,* $S \subseteq A$ *guztietarako baldin eta soilik baldin* f *supraiektiboa bada.*

(iii) Izan bitez $g, h\colon B \to C$ *eta* f *supraiektiboa. Orduan* $g \circ f = h \circ f$ *bada,* $h = g$*.*

(iv) $g\colon B \to A$ *eta* $f \circ g = 1_B$*, orduan* f *supraiektiboa da.*

(v) $S = f^{-1}(f(S))$*,* $S \subseteq A$ *guztietarako, baldin eta soilik baldin* f *injektiboa bada.*

(vi) $f(S_1 \cap S_2) = f(S_1) \cap f(S_2)$ *da* $S_1, S_2 \subseteq A$ *guztietarako baldin eta soilik baldin* f *injektiboa bada.*

(vii) f *supraiektiboa bada, orduan,* $S \subseteq A$ *guztietarako,* $B - f(S) = f(A - S)$ *da baldin eta soilik baldin* f *injektiboa bada.*

(viii) $g, h\colon C \to A$ *eta* f *injektiboa bada, orduan* $f \circ g = f \circ h$ *berdintzak inplikatzen du* $h = g$ *dela.*

(ix) $g\colon B \to A$ *eta* $g \circ f = 1_A$ *badira, orduan* f *injektiboa da.*

Froga. (i): $\Rightarrow$) Demagun $T = f(f^{-1}(T))$ dela T koeremuko edozein azpimultzo izanik. Bereziki, hipotesia egia izango da $T = B$ harturik. Orduan $B = f(f^{-1}(B))$ izango dugu, eta badakigunez $f^{-1}(B) = A$ dela, $B = f(A)$ ondorioztatzen dugu; hau da, f supraiektiboa da.

$\Leftarrow$) Demagun orain f supraiektiboa dela eta izan bedi $T \subseteq B$ edozein azpimultzo. Orduan $f^{-1}(T) \subseteq A$ eremuko azpimultzo bat da, eta Proposizioa 2.2.16-ko (iii) atala kontuan izanik eta $S = A$-rako erabiliz,

$$f(A \cap f^{-1}(T)) = f(A) \cap T$$

dugu. Baina $A \cap f^{-1}(T) = f^{-1}(T)$ da eta $f(A) = B$. Nola $T \subseteq B$ den $T \cap B = T$ da eta nahi genuen berdintza lortzen dugu.

(ii:) $\Rightarrow$) Hipotesia egia dela suposatuz, ikus dezagun zer gertatzen den $S = A$ deneko kasuan. Kasu honetan $B - f(A) \subseteq f(A - A) = f(\emptyset) = \emptyset$. Baina multzo hutsaren azpimultzo bakarra multzo hutsa da, eta beraz $B - f(A) = \emptyset$; hau da, $B = f(A)$, eta f supraiektiboa da.

$\Leftarrow$) Demagun orain f supraiektiboa dela eta izan bedi $S \subseteq A$ edozein. Badakigu oro har $f(A) - f(S) \subseteq f(A - S)$ dela eta badakigunez $f(A) = B$ dela badaukagu frogatu nahi genuena.

(iii): Demagun batetik f supraiektiboa dela eta bestetik $g \circ f = h \circ f$ dugula, eta ikus dezagun $h = g$ ondoriozta dezakegula. Bi funtzio berdinak izateko eremu eta koeremu bera izan behar dituzte. Hori hipotesiak ematen digu, bien eremua da B eta koeremua C. Beraz, soilik falta da ikustea $b \in B$ guztietarako $g(b) = h(b)$ dela. Izan bedi, beraz, $b \in B$ edozein. Badakigunez f supraiektiboa dela, existitzen da $a \in A$ non $f(a) = b$ den. Baina orain, konposizioak berak direla erabiliz, badakigu $g(f(a)) = h(f(a))$ dela, eta hori da frogatu nahi genuena, $f(a) = b$ delako hain justu.

(iv): Demagun $g : B \to A$ funtzioa dugula eta $f \circ g = 1_B$ dela. Ikusi nahi dugu f supraiektiboa dela. Hau da, $b \in B$ edozein izanik existitzen dela b-ren aurreirudiren bat. Identitate funtzioa supraiektiboa denez, existitzen da $b \in B$ (hain justu ere b elementu bera) zeinentzako $1_B(b) = f(g(b)) = b$ den. Baina $g(b) \in A$ daukagu. Beraz, badaukagu A-ko elementu bat, $a = g(b)$ hain justu, zeinentzako $f(a) = b$ den, eta frogatu dugu f supraiektiboa dela.

(v): $\Rightarrow$) Ikusi nahi dugu f injektiboa dela. Hau da, bi elementu ezberdinen irudia desberdina dela. Demagun ezetz. Demagun existitzen direla $a_1 \neq a_2 \in A$ zeinentzako $f(a_1) = f(a_2)$ den. Har dezagun orain $S = \{a_1\}$. Orduan $\{a_1, a_2\} \subseteq f^{-1}(f(\{a_1\})) = \{a_1\}$ izango genuke, baina hau kontraesana da, $a_2 \neq a_1$ delako eta, beraz, $a_2 \notin \{a_1\}$ dugulako.

$\Leftarrow$) Demagun orain f injektiboa dela eta izan bedi $S \subseteq A$ edozein. Badakigu Proposizioa 2.2.16-ko (i) ataletik $S \subseteq f^{-1}(f(S))$ dela orokorrean. Beraz, beste partekotasuna da frogatu beharrekoa. Hau da, ikus dezagun

$f^{-1}(f(S)) \subseteq S$ dela. Izan bedi $a \in f^{-1}(f(S))$ edozein elementu. Ikus nahi dugu a elementua S multzoan dagoela. Badakigu $a \in f^{-1}(f(S))$ izatearren $f(a) \in f(S)$ dela. Hau da, existitzen da $s \in S$ non $f(a) = f(s)$ den. Baina f injektiboa denez, irudiak berdinak izateak $a = s$ dela inplikatzen du; eta beraz, $a \in S$.

(vi): $\Rightarrow$) Izan bitez $a_1 \neq a_2 \in A$ bi elementu ezberdin. Ikusi nahi dugu irudi ezberdina dutela. Hipotesian $S_1 = \{a_1\}$ eta $S_2 = \{a_2\}$ harturik ondokoa dugu: $f(\emptyset) = f(\{a_1\}) \cap f(\{a_2\})$. Alegia, $f(\{a_1\}) \cap f(\{a_2\}) = \emptyset$ dugula, eta nola $f(\{a_i\}) = \{f(a_i)\}$ baino ez den $i = 1, 2$-rako, multzo horiek disjuntuak izatea eta $f(a_1) \neq f(a_2)$ izatea baliokideak dira.

$\Leftarrow$) Izan bitez orain $S_1, S_2 \subseteq A$ edozein bi azpimultzo. Badakigu Proposizioa 2.2.13-tik oro har $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$ egia dela. Beraz, beste partekotasuna da frogatu beharrekoa. Izan bedi $b \in f(S_1) \cap f(S_2)$. Orduan, existitzen da $s_1 \in S_1$ zeinentzako $f(s_1) = b$ den eta baita $s_2 \in S_2$ bat ere $f(s_2) = b$ izanik. Baina orduan, $f(s_1) = b = f(s_2)$ daukagu, eta f injektiboa denez, horrek esan nahi du $s_1 = s_2$ dela. Nola bata S_1-en eta bestea S_2-n zeuden, berdinak badira ebakiduran dago elementu hori. Beraz, topatu dugu $s = s_1 = s_2 \in S_1 \cap S_2$ zeinentzako $f(s) = b$ den, eta beste partekotasuna frogatuta geratzen da.

□

Ariketa 2.viii. Egin falta diren hiru enuntziatuen frogak.

Irudi eta aurreirudiekin gertatzen dena aztertzeaz gain, galdera naturala da zer gertatzen den injektibo eta supraiektibo izatearekin bi funtzio konposatzen ditugunean. Alegia, noiz da bi funtzioren konposaketa injektibo edo supraiektibo, hasierako biak nolakoak ziren kontuan izanik? Ondorengo proposizioak argitzen du hori.

Proposizioa 2.2.21. *Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : B \to C$ bi funtzio. Orduan,*

(i) *Baldin eta f eta g supraiektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere supraiektiboa da.*

(ii) *Baldin eta f eta g injektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere injektiboa da.*

(iii) *Baldin eta f eta g bijektiboak badira, orduan $g \circ f$ ere bijektiboa da.*

Froga. Hasteko ohartu (iii) atala (i) eta (ii) egia izatearen ondorio zuzena dela. Beraz, aski izango da lehen biak frogatzea.

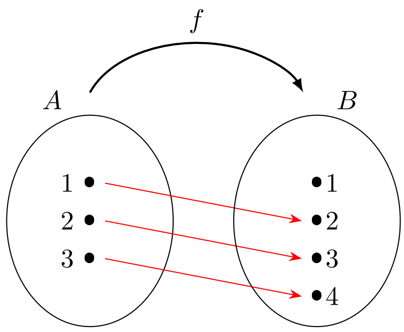
(i): Ikusi nahi dugu $g \circ f(A) = C$ dela. Baina $g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$ da, non lehen berdintza konposizioaren definizioa aplikatuz lortu dugun, eta beste biak f supraiektiboa dela eta g supraiektiboa dela erabiliz hurrenez hurren.

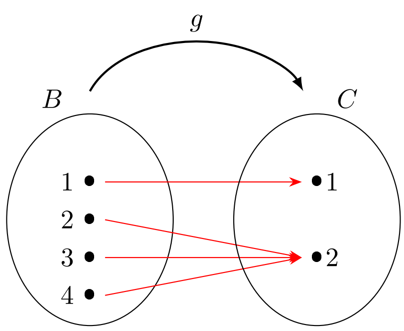
(ii): Izan bitez $a_1, a_2 \in A$ bi elementu ezberdin, hau da $a_1 \neq a_2$. Orduan, f injektiboa izatearren, badakigu $f(a_1) \neq f(a_2)$ dela. Baina elementu hauek B-koak dira, eta g aplikatzen badiegu, g ere injektiboa denez, irudi ezberdina izango dute. Hau da $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. Eta beraz, frogatu dugu nahi genuena, A-ko bi elementu ezberdinek irudi ezberdina dute $g \circ f$-ren bidez.

□

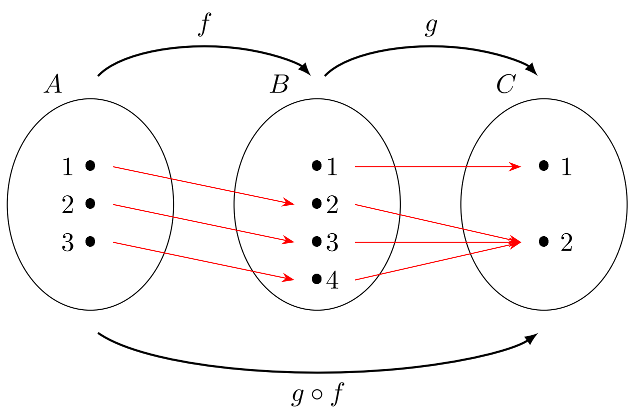
Berriz ere, egoera honetan gure buruari galdera egin behar geniezaioke: eta beste posibilitate guztiekin zer gertatzen da? Zergatik ez dira proposizioan ageri? Bada, beste aukera guztien ezin dugulako ezer ziurtatu orokorrean. Ikus ditzagun zenbait adibide:

Adibidea 2.2.22. Ikus dezagun kasu bat non f injektiboa den eta g supraiektiboa, baina beraien konposaketa ez gauza bat ez bestea. Izan bitez $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ eta $C = \{1, 2\}$ eta defini ditzagun f eta g ondorengo moduan:





Orduan f eta g-ren konposaketa honakoa izango litzateke:



Irudian garbi ikus daitekenez, A-ko hiru elementuen irudia 2 izango da. Beraz, hasteko, ez da injektiboa izango, irudi bera dutelako elementu ezberdinek. Bestetik, denek 2 irudia badute esan nahi du 1-ak ez daukala aurreirudirik, eta beraz, ez da supraiektiboa izango.

Ariketa 2.ix. Eraiki beste aukera denetarako adibideak zeinentzako ez diren propietateak mantentzen.

Alderantzizko funtzioa

Funtzio bat bijektiboa den kasuan, nola koeremuko elementu guztiek aurreirudiren bat duten, eta nola gainera bakarra den, beste norantzan ere funtzio bat ikus daiteke. Ohartu horretarako bi baldintzak bete behar direla. Izan ere, funtzio bat injektiboa ez bada, koeremuko elementuren batek aurreirudi bat baino gehiago izango ditu, eta beraz geziei buelta ematerakoan ez zaigu funtzio bat geratuko (elementu beretik bi gezi irtengo liratekeelako!). Aldiz, funtzioa supraiektiboa ez balitz, orduan geziei buelta ematerakoan elementu batzuk irudi gabe geratuko lirateke, eta hori ere ez dator bat funtzioaren definizioarekin.

Definizioa 2.2.23. Izan bedi $f : A \to B$ funtzio bijektiboa. Orduan f*-ren alderantzizkoa*, f^{-1} bidez denotatuko duguna, beste funtzio bat da, non $f^{-1} : B \to A$ den eta $f^{-1}(b) = a$ den, $a \in A$ izanik $f(a) = b$ betetzen duen elementua.

Oharra 2.2.24. Kontuz ibili behar dugu notazioarekin. Izan ere, notazio berarekin deklaratuko ditugu multzo baten aurreirudia eta alderantzizko funtzioa. Jakitun izan behar dugu, kontestuaren arabera, zeini buruz ari garen jakiteko. Kasu batean multzo bati buruz ariko garelako, eta bestean funtzio bati buruz.

Adibidea 2.2.25. Aurki dezagun Adibideak 2.2.19 (ii) ataleko f funtzioaren alderantzizkoa. $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ topatu nahi dugu zeinentzako $f^{-1}(z,t) = (x,y)$ den $f(x,y) = (z,t)$ betetzen delarik. Nahi genukeena da (x,y)-ren esprezio bat aurkitu (z,t)-ren araberakoa. Horretarako, erabil dezagun f-ren definizioa. Badakigu $f(x,y) = (x+y, x-y) = (z,t)$ izatea nahi dugula. Hau da, koordenatuka berdinak izan behar dira, eta horrek ondoko sistema ematen digu:

$$\begin{aligned} x + y &= z, \\ x - y &= t. \end{aligned}$$

Sistema hori ebatziz $x = \frac{z+t}{2}$ eta $y = \frac{z-t}{2}$ lortzen dugu. Beraz,

$$f^{-1}(z,t) = \left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right)$$

dela lortzen dugu.

Atal honekin amaitzeko, ikus ditzagun alderantzizko funtzioaren zenbait propietate:

Proposizioa 2.2.26. *Izan bedi $f\colon A \to B$ funtzioa bijektiboa. Orduan,*

(i) f^{-1} *ere funtzio bijektiboa da.*

(ii) $f^{-1} \circ f = 1_A$, $f \circ f^{-1} = 1_B$ *eta* $(f^{-1})^{-1} = f$ *dugu.*

Ariketa 2.x. Idatzi aurreko proposizioaren frogapen formala.

2.3 Baliokidetasun eta ordena erlazioak

Matematikan garrantzi handiko kontzeptu bat berdintasunarena da. Baina bizitza errealean bezala, batzuetan gauza batzuk berdintzat kontsideratu nahiko ditugu erabat berdinak izan gabe. Adibidez, puntu batetik bestera iristeko bide posibleen artean, interesgarria izan liteke distantzia bera egiten dutenak berdintzat hartzea. Problema jakin eta kontestuaren arabera interesekoa izan daiteke ikuspuntu hau, nahiz eta agian bi bide ezberdin berdintzat tratatu. Nolabait, propietate jakin batzuk partekatzen dituzten elementuak berdintzat hartzea interesatuko zaigu sarri. Hala, horietako bakarrarentzat zerbait frogatzeko baldin bagara, kasu batzuetan aldi berean denentzako frogatu ahalko dugu. Hau guztia, baliokidetasun erlazio eta baliokidetasun klaseak erabiliz egiten da, ondoren ikusiko dugun bezala.

Definizioa 2.3.1. Izan bedi A multzo bat. Multzo horren gaineko $\mathcal{R}$ erlazio bat $A \times A$-ren azpimultzo bat da. Baldin eta $(a, b) \in \mathcal{R}$ bada, $a\mathcal{R}b$ idatziko dugu eta"a b-rekin erlazionatuta dago" irakurri.

Oharra 2.3.2. Ordenak garrantzia du erlazioaren kasuan. Hau da, $a\mathcal{R}b$ badugu a elementua b elementuarekin erlazionatuta dago, baina alderantziz ez du zertan. Gerta liteke b elementua a-rekin erlazionatuta ez egotea. Alegia (b, a) elementua ez egotea $\mathcal{R}$ multzoan.

Adibideak 2.3.3. (i) A edozein multzo izanik, $\mathcal{R} = \{(a, a) \mid a \in A\}$ multzoak erlazio bat definitzen du A-n. Berdintza erlazioa, hain zuzen ere. Izan ere, elementu bakoitza bere buruarekin erlazionatuta dago, eta ez beste inorekin.

(ii) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 2), (4, 3)\}$ multzoa erlazio bat da $\mathbb{Z}$-n. Kasu honetan 0 bere buruarekin erlazionatuta dago, 1-a 2-arekin, 2-a bere buruarekin eta 4-a 3-arekin. Adibidez, 3-a ez dago inorekin erlazionatuta.

(iii) $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a = bn\}$ multzoak ere erlazio bat definitzen du $\mathbb{Z}$ multzoan. Adibidez, $2\mathcal{R} - 2$, $18\mathcal{R}3$, $18\mathcal{R}6$... Oro har a b-rekin erlazionatuta dago baldin eta a b-ren multiploa bada.

(iv) Defini dezagun $\mathbb{R}$-n ondoko erlazioa: $a\mathcal{R}b$ baldin eta $a \leq b$. Orduan $5\mathcal{R}5$, $5\mathcal{R}100$, $\pi\mathcal{R}8$...

Esan bezala, berdintza nolabait "malgutzea" da gure asmoa. Horretarako, berdintzaren erlazioak zein propietate betetzen dituen aztertuko dugu, eta gero ikusi zer gertatzen den horietako baldintza batzuk malgutzen baditugu.

Hasteko, elementu bat beti da bere buruaren berdina. Multzo bat izanik, demagun A, badakigu $a \in A$ edozein elementuk $a = a$ betetzen duela. Bestalde, berdintzaren kasuan ez da posible goiko oharrean aipatu duguna gertatzea. Hau da, a elementua b-rekin erlazionatuta badago (alegia, b-ren berdina bada) derrigorrez b-k a-rekin erlazionatuta egon behar du. Hau da, ordenak ez du "inporta", $a, b \in A$ guztietarako $a = b$ bada $b = a$ ere bai. Hirugarren propietate bat da bi gauza hirugarren bati berdinak badira, derrigorrez elkarren berdinak izan behar dutela. Hau da, $a, b, c \in A$ izanik, baldin eta $a = b$ eta $b = c$ badira, orduan $a = c$ dela badakigu. Bukatzeko, elementu batekin bi aldeetatik erlazionatuta dagoen elementu bakarra bere burua da. Alegia, nik baldin badakit a b-rekin erlazionatuta dagoela eta b a-rekin, orduan $a = b$ dela ziurta dezaket. Hau berdintzaren kasuan tautologikoa da, baina ikusiko dugunez propietate garrantzitsua izango da orokorrean.

Hitz lauz azaldutako propietate horiek denek izen bat hartzen dute. Izan ere, berdintzak bai, baina beste erlazio batzuek ez dituzte zertan propietate horiek bete.

Definizioa 2.3.4. Izan bedi $\mathcal{R}$ A multzoaren gaineko erlazio bat. Orduan,

(i) Erlazioa *erreflexiboa* dela diogu baldin eta $a\mathcal{R}a$ bada $a \in A$ guztietarako.

(ii) Erlazioa *simetrikoa* dela diogu baldin eta $a\mathcal{R}b$ den kasu guztietan $b\mathcal{R}a$ baldin bada.

(iii) Erlazioa *iragankorra* edo *trantsitiboa* dela diogu baldin eta $a\mathcal{R}b$ eta $b\mathcal{R}c$ den kasu guztietan $a\mathcal{R}c$ baldin badaukagu.

(iv) Erlazioa *antisimetrikoa* dela diogu baldin eta $a\mathcal{R}b$ eta $b\mathcal{R}a$ izateak $a = b$ izatea inplikatzen badu.

Ikus dezagun aurreko adibideko erlazioak nolakoak diren:

Adibideak 2.3.5. (i) Esan bezala, berdintzak lau propietateak betetzen ditu. Konprobatu ariketa gisa.

(ii) Bigarren adibidea ez da erreflexiboa, adibidez, $1\mathcal{R}1$ ez delako betetzen (beste asko ere ez). Ez da simetrikoa $1\mathcal{R}2$ daukagulako, baina $2\mathcal{R}1$ ez. Bada iragankorra, izan ere $a\mathcal{R}b$ eta $b\mathcal{R}c$ gertatzen den kasu bakarra $1\mathcal{R}2$ eta $2\mathcal{R}2$ da, eta kasu horretan $a\mathcal{R}c$ betetzen da, $1\mathcal{R}2$ delako. Azkenik, bada antisimetrikoa ere, izan ere, aldi berean eskumatik eta ezkerretik elementuren batekin erlazionatuta dauden erlazio bakarrak $0\mathcal{R}0$ eta $2\mathcal{R}2$ dira, eta bietan ondorioztatzen da $0 = 0$ eta $2 = 2$.

(iii) Hirugarren adibidea erreflexiboa da, edozein zenbaki bere buruaren multiploa delako. Ez da simetrikoa, adibidez $18\mathcal{R}3$ delako, baina $3\mathcal{R}18$ ez (18 3-ren multiploa da, baina 3 ez da 18-ren multiplo). Bada iragankorra, izan ere a b-ren multiploa bada, eta b c-rena, $a = bn$ eta $b = cm$ izango dugu, eta ondorioz $a = c(nm)$. Azkenik, ez da antisimetrikoa, izan ere $2\mathcal{R} - 2$ da eta $-2\mathcal{R}2$, baina $2 \neq -2$ (orokorrean 0 ez beste denekin gertatzen da hau).

(iv) Azken erlazioa erreflexiboa, iragankorra eta antisimetrikoa da, baina ez da simetrikoa. Izan ere, $x \leq x$ da $x \in \mathbb{R}$ denetarako; $x \leq y$ bada eta $y \leq z$ orduan $x \leq z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$ edozein izanik; $x \leq y$ eta $y \leq x$ bada, orduan $x = y$; eta $1 \leq 2$, baina $2 \not\leq 1$ dugu.

Proposizioa 2.3.6. *Izan bedi $\mathcal{R}$ A-ren gaineko erlazio bat, zeinek aurreko lau propietateak betetzen dituen. Orduan $\mathcal{R} = \{(a, a) \mid a \in A\}$ da. Bestela esanda, lau propietateak betetzen dituen erlazio bakarra berdintza da.*

Froga. Izan bedi $S = \{(a, a) \mid a \in A\}$ multzoa eta ikus dezagun $\mathcal{R}$-ren berdina dela. Hasteko, argi dago $S \subseteq \mathcal{R}$ dela, erlazioa erreflexiboa delako. Demagun orain badagoela $(a, b) \in \mathcal{R} - S$ elementuren bat. Elementu hori S-n ez egoteagatik badakigu $a \neq b$ dela. Baina $(a, b) \in \mathcal{R}$ izateagatik, eta erlazioa simetrikoa denez, $(b, a) \in \mathcal{R}$ dugu. Gainera, erlazioa antisimetrikoa denez, $a = b$ izatera behartuta gaude, eta hori suposatu dugunaren kontrakoa da. $\square$

Ohartu iragankorra izatearen baldintza ez dugula erabili. Benetan, beraz, simetriko eta antisimetriko izateak inplikatzen du trantsitibo izatea zuzenean. Edo beste era batera esanda, simetriko eta antisimetriko izatearen baldintzak biak mantenduz gero, ez dugu berdintza baino malguagoa den ezer lortuko.

2.3.1 Baliokidetasun erlazioak

Esan bezala, berdintzaren antzekoa den erlazio bat lortzeko bidean, simetriko edo antisimetriko izatearen baldintzetako bat ezabatu beharko dugu zerbait berria lortzeko. Hori da hain zuzen ere egingo duguna. Kasu honetan, antisimetrikotasuna ezabatuko dugu.

Definizioa 2.3.7. Izan bedi A multzoa eta $\mathcal{R}$ multzoaren gaineko erlazio bat. Erlazio hori *baliokidetasun-erlazioa* dela diogu, baldin eta erreflexiboa, simetrikoa eta iragankorra bada.

Notazioa 2.3.8. Erlazio bat baliokidetasun erlazioa denean, sarritan $\mathcal{R}$ erabili ordez $a \sim b$ edo $a \equiv b$ notazioa erabiltzen da a eta b erlazionatuta daudela adierazteko.

Adibideak 2.3.9. (i) Edozein multzotan, berdintza erlazioa baliokidetasun-erlazioa da.

(ii) Har dezagun $\mathbb{Z}$ multzoan $\mathcal{R}$ honela definitutako erlazioa: $a\mathcal{R}b \iff |a| = |b|$, non $|a|$ notazioak a-ren balio absolutua adierazten duen. Alegia, $2\mathcal{R}-2$ da adibidez. Ikus dezagun baliokidetasun erlazioa dela. Argi dago erreflexiboa dela, $|a| = |a|$ delako zenbaki oso guztietarako. Simetrikoa dela ere argi dago, berdintza bera simetrikoa delako eta beraz, $|a| = |b|$ den guztietarako $|b| = |a|$ izango da. Iragankorra dela ere berdintza iragankorra delako betetzen da.

(iii) Defini dezagun $\mathbb{Z}$-n ondoko erlazioa: Bi zenbaki erlazionatuta daude baldin eta biak bikoitiak edo biak bakoitiak badira. Ikus dezagun erlazio hau baliokidetasun erlazioa dela. Hasteko, zenbaki bat bakoitia edo bikoitia izan, bere buruarekin erlazionatuta dago. Simetrikoa ere bada, m n-rekin erlazionatuta badago, biak bikoitiak edo biak bakoitiak direlako da, eta beraz, n ere m-rekin erlazionatuta egongo da. Bukatzeko, iragankorra ere bada, izan ere $m, n, k \in \mathbb{Z}$ baditugu eta $m\mathcal{R}n$ eta $n\mathcal{R}k$, orduan n bikoitia bada, m eta k ere bai, eta bakoitia bada gauza bera. Alegia, m eta k ere erlazionatuta daudela.

(iv) Aurreko adibidea orokor dezakegu adibidez bikoiti eta bakoiti beharrean hiruren multiploetara. Kasu honetan, baina, hiru aukera izango ditugu. Hiruren multiplo izan edo hiruren multiplo izateko bat edo bi falta zaizkion zenbaki horri. Honela defini dezakegu $n, m \in \mathbb{Z}$ zenbakien arteko erlazioa: $m\mathcal{R}n \iff 3|(m-n)$, non $|$-k "zatitzen du" esan nahi duen. Edo beste era batera esanda, $m\mathcal{R}n \iff$ existitzen bada $k \in \mathbb{N}$ non $m - n = 3k$ den. Honela $-3, 0, 3, 6, 9...$ elkarrekin erlazionatuta daude; baita $-2, 1, 4, 7...$ beraien artean ere. Eta bukatzeko $-1, 2, 5....$ Ohartu biren multiploen kasuan bakoiti eta bikoiti aukerak baino ez dauden bezala, kasu honetan ere hiru aukera hauek baino ez dauzkagula.

Ariketa 2.xi. Frogatu azken adibidea baliokidetasun erlazioa dela eta argudiatu zergatik dauden elkarri erlazionatuta multzo bakoitzean aipatutako zenbakiak.

Oharra 2.3.10. Ohartu azken adibidean 3 zenbakiak ez duela aparteko garrantzirik. Ez dugu bere propietaterik erabili. Beraz, 3-arentzako egin dugun gauza bera n edozein zenbaki arruntentzako egin genezake. Honi n moduluarekiko kongruente izatea esaten zaio, eta aurrerago ikusiko dugu modu sakonago batean.

Ikusi dugun moduan, baliokidetasun erlazioek multzokatu egiten dituzte elementuak, segun eta elkarrekin erlazionatuta dauden ala ez. Multzo horietako bakoitzari izen berezi bat emango diogu.

Definizioa 2.3.11. Izan bedi $\mathcal{R}$ A multzoaren gainean definitutako baliokidetasun erlazioa eta $a \in A$ elementua. Orduan a elementuaren *baliokidetasun klasea* a-rekin erlazionatuta dauden elementuen multzoa da. Hau da,

$$[a] = \{x \in A \mid x\mathcal{R}a\}.$$

Ikus dezagun goian emandako adibideekin zer gertatzen den.

Adibideak 2.3.12. (i) Berdintza hartuz gero, $a \in A$ elementuarekin erlazionatuta dagoen elementu bakarra bere burua da. Beraz, kasu honetan $[a] = \{x \in A \mid a = x\} = \{a\}$ da edozein $a \in A$-rako. Ohartu ez dela elementua beraz, elementu hori barne duen multzoa baizik! Baliokidetasun klaseak beti izango dira multzoak.

(ii) Bigarren adibidean $a \in \mathbb{Z}$ izanik,

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} \mid |a| = |x|\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \pm a\} \\ &= \{a, -a\}\end{aligned}$$

izango genuke. Hau da, zenbaki bakoitzaren baliokidetasun klasean bera eta bere negatiboa egongo dira. Adibidez, $[3] = \{-3, 3\}$. Ohartu, jakina $[3] = [-3]$ dugula!

(iii) Bikoiti eta bakoitien kasuan, bi baliokidetasun klase izango ditugu. Bikoitiena eta bakoitiena. Izan ere demagun 2 hartzen dugula. Orduan $[2] = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : \ m = 2k\}$. Eta aldiz, bakoiti baten baliokidetasun klasean bakoiti guztiak egongo dira, hau da $[1] = \{..., -3, -1, 0, 1, 3, 5, ...\}$. Ohartu oraingoan ere $[2] = [0] = [4] = [28]$ eta $[1] = [17]$ etab. dugula.

(iv) Azkenik, 3-ren multiploen kasuan hiru baliokidetasun klase ezberdin ditugu.

Ariketa 2.xii. Deskribatu azken adibidean $1, 8, 9, 25$ eta -4-ren baliokidetasun klaseak. Zeintzuk dira berdinak?

Ohartu baliokidetasun klase ezberdinetan geratzen zaigula gure multzoa banatuta ikusi ditugun adibide guztietan. Hau da, elementu bakoitza baliokidetasun klase bakar batean dago, eta beti dago baten batean. Ondorengo proposizioak formalizatzen du ideia hori:

Proposizioa 2.3.13. *Izan bedi $\sim$ A multzoaren gainean definitutako baliokidetasun erlazioa. Orduan,*

(i) $\bigcup_{a\in A}[a] = A$,

(ii) $a \sim b \Longleftrightarrow [a] = [b]$,

(iii) $[a] \cap [b] = \emptyset$ *baldin eta* $[a] \neq [b]$ *bada.*

Froga. (i) atala frogatzeko aski da ohartzea $[a] \subseteq A$ denez $a \in A$ guztietarako, bildurak A-n egoten jarraituko duela. Bestalde, $b \in A$ beti dagoenez $[b]$-n, egia da existitzen dela klaseren bat non $b \in [b]$ den $b \in A$ izanik, eta beraz, $b \in \cup_{a\in A}[a]$.

(ii) ikusteko bi partekotasunak ikusi beharko genituzke. Baina letrak mutuak direnez erabat simetrikoa izango da argudioa. Horregatik, aski izango da $[a] \subseteq [b]$ dugula frogatzea. Izan bedi, beraz, $c \in [a]$. Orduan $a \sim c$ dugu. Baina hipotesiagatik $a \sim b$ da, eta erlazioa simetrikoa denez, $b \sim a$ ere badugu. Orain, iragankorra dela erabiliz, $b \sim c$ lortzen dugu; hortik $c \sim b$, eta ondorioz, $c \in [b]$.

(iii) atala ikusteko, demagun $[a] \neq [b]$ izanik gertatzen dela $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ izatea. Orduan existitzen da $c \in [a] \cap [b]$. Hau da, $a \sim c$ eta $b \sim c$. Baina erlazioa simetrioa denez $c \sim b$ ere badugu, eta ondorioz $a \sim b$, eta aurreko atalagatik $[a] = [b]$; baina hau suposatu dugunaren kontrakoa da, eta beraz, kontraesan batera iritsi gara. □

Multzo bat horrela "zatikatuta" daukagunean izen berezi bat ematen zaio horri.

Definizioa 2.3.14. Izan bedi A multzoa eta $P \subseteq \mathcal{P}(A)$, A-ren azpimultzoen familia bat, non

(i) $\bigcup_{B\in P} B = A$,

(ii) $B \cap C = \emptyset$ baldin eta $B \neq C$,

orduan P A-ren partiketa bat dela esaten da.

Teorema 2.3.15. *Izan bedi A multzoa. Orduan baliokidetasun erlazio baten baliokidetasun klaseek A-ren partiketa bat definitzen dute. Eta alderantziz, A-ren partiketa bat izanik A-ren gaineko baliokidetasun erlazio bat defini dezakegu baliokidetasun klase gisa partiketa hori izango duena.*

Froga. Lehen esaldiaren frogapena aurreko proposizioaren (i) eta (iii) atalek ematen dute. Alderantzizkoa frogatzeko, demagun P A-ren partiketa bat dela. Orduan $a \sim b$ definitzen dugu, baldin eta soilik baldin $a, b \in C$, $C \in P$-ren batentzat. Horrek baliokidetasun erlazio bat definitzen du, eta baliokidetasun klase guztiak P-ko elementuak dira. □

2.3.2 Ordena Erlazioak

Baliokidetasun erlazioen kasuan berdintzaren propietate antisimetrikoa erlaxatu genuen gisan, hori mantendu eta simetrikoa ken dezakegu. Orduan ordena erlazio bat lortuko dugu.

Definizioa 2.3.16. Izan bedi A multzoa eta $\mathcal{R}$ A-ren gaineko erlazioa. Erlazio hori *ordena-erlazioa* dela diogu, baldin eta erreflexiboa, antisimetrikoa eta trantsitiboa bada.

Izenak ere hala iradokitzen digu, eta ohiko zenbakien gaineko ordena erlazioa ordena-erlazioa dela ikus daiteke.

Adibidea 2.3.17. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ordena-erlazioa da. Argi dago erreflexiboa betetzen dela, izan ere $\forall a \in \mathbb{Z}$ betetzen da $a \leq a$ izatea. Gainera, antisimetrikoa da. Baldin eta $a, b \in \mathbb{Z}$ baditugu eta $a \leq b$ eta $b \leq a$ bada, orduan derrigorrez $a = b$ da. Azkenik, $a \leq b$ eta $b \leq c$ badugu, bistakoa da $a \leq c$ ere beteko dela. Ondorioz, iragankorra ere beteko da, eta ordena-erlazioak bete beharreko hiru propietateak betetzen dira.

Ohartu gauza bera ondorioztа dezakegula $\mathbb{Z}$-ren lekuan $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ edo $\mathbb{R}$ jarrita.

Goiko adibidearen kasuan, edozein bi elementu konparagarriak dira. Hau da $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ bietako bat gertatzen da $a \leq b$ edo $b \leq a$. Hori gertatzen den kasuetan ordena-erlazioa *totala* dela esaten da. Baina jakina, hori ez da derrigorrezko baldintza zerbait ordena-erlazioa izateko. Alegia, badirela totalak ez diren ordena-erlazioak. Hona hemen adibide bat.

Adibidea 2.3.18. Izan bedi X multzo bat. Orduan partekotasun erlazioa, $\subseteq$, ordena-erlazio bat da $\mathcal{P}(X)$-n. Izan ere $A \in \mathcal{P}(X)$ izanik, bistakoa da $A \subseteq A$ dela. Beraz, erreflexiboa betetzen da X-ren azpimultzo guztietarako. Bestalde, $A, B \subseteq X$ izanik, $A \subseteq B$ eta $B \subseteq A$ baldin badauzkagu, orduan derrigorrez $A = B$ da. Beraz, antisimetrikoa ere betetzen da. Azkenik, $A \subseteq B$ bada eta $B \subseteq C$, orduan zuzenean $A \subseteq C$ da, eta iragankorra betetzen da. Ohartu hala ere ordena hau ez dela totala. Izan ere, demagun $X = \{1, 2\}$ multzoa dela. Orduan $A = \{1\}$ eta $B = \{2\}$ azpimultzoen kasuan, ezin dugu ez $A \subseteq B$ ez $B \subseteq A$ denik esan.