1. Gaia: Lengoaia Matematikoa

1.1 Sarrera

1.1.1 Zer (izan) da Matematika?

Ez da erantzuteko galdera erraza, eta ez dauka ziur aski erantzun bakar eta absoluturik. Baina azter dezagun, egungo matematikaren ikuspuntutik historikoki zer eta nola landu izan den, labur bada ere. Izan ere, horrek lagunduko digu graduan ikasiko duzuen matematika, matematika modernoa esaten zaiona, nondik eta nola sortu zen ulertzen.

Matematika, ziur aski, edozein zibilizaziotan existitu den espresio mota bat da. Aurkitu diren aztarna zaharrenetakoak, Babiloniarren zibilizaziokoak dira, k.a. 1800-1600. urteetakoak. Ordurako zenbait ekuazioren ebazpena, erro karratu batzuen kalkulua eta hirukote Pitagoriko zenbait aurkituta zituzten. Alegia, Pitagorasen teorema ezaguna zela, Pitagoras bera sortu baino 1000 urte lehenago!

Hala ere, deigarriena, eta sarritan matematikaren sorreratzat jotzen dena, antzinako greziarren garaia izan zen, kristo aurreko VI. mendearen bueltan. Guk dakigula lehen aldiz, logika eta arrazonamendu deduktiboa erabiltzen hasi ziren orduan. Eta horrek ahalbidetu zien ordura arte ezagutu ez ziren "egia" motak ezagutzea.

Ordura arteko matematikariak arrazonamendu induktibo gisa ezaguna denaz soilik baliatzen ziren. Alegia, behaketak egin, eta behaketa horietatik ondorioak ateraz orokorpenak enuntziatzeaz. Beti ere, orokorpen horrek huts egiten zuen adibide bat azaltzen zen arte. Zientzia enpirikoaren gehiengoak hala funtzionatzen du, ezinbestean. Baina matematikak badu beste zientzien aldean bereizgarri bat, bestelako izaera bat ematen diona. Eta hori, logika deduktiboak ematen dio, neurri handi batean.

Gizartearen begitara matematika nagusiki kalkulu eta ekuazioak badira ere, ez da errealitatearen isla zuzena. Matematika (abstraktua, gutxienez) gehiago da enuntziatu baten egiazkotasuna edo gezurrezkotasuna frogatzen ahalegintzen den praktika bat. Enuntziatua izan daiteke geometrikoa, zenbakiei buruzkoa edo

Oharra: Material osoan zehar ageri diren grafiko, diagrama eta irudi guztiak propioak dira.

funtzio baten izaerari buruzkoa, baina helburua bera da: enuntziatu hori *egia* ala *gezurra* den erabakitzea.

Prozesu horrek bi atal ditu. Batetik, enuntziatua formulatu beharra dago. Huskeria eman dezake, baina enuntziatu matematiko zentzuzko bat formulatze hutsaren atzean lan izugarria dago. Behin enuntziatu bat formulatuta, frogapen bat bilatzeari ekiten zaio. Horrek ere, lan izugarria eta proba-errore prozesu luze bat dakar berarekin.

Hurrengo atalean hori ulertzen ahaleginduko gara.

1.1.2 Zer da frogapen bat?

Matematika abstraktuaren funtsezko kontzeptuetako bat *frogapen* edo *demostrazio* matematikoena da. Frogatu aditzak, hiztegian begiratuz gero, zera esan nahi du:

Frogen bidez zerbait egiatzat edo ziurtzat agertarazi edo ezagutarazi.

Batzuetan nahasi egiten dira *frogatu* eta *probatu* hitzak, eta gure kasuan argi bereizi nahi ditugu. *Probatu* aditzaren definizioa, hau da:

Zerbait erabili, nola funtzionatzen duen jakiteko, edo dagokion eran funtzionatzen duen egiaztatzeko.

Matematikariok, lehenengoaz ari gara frogatzeaz edo frogapenetaz ari garenean. Hau da, enuntziatu jakin bat egiatzat hartzeko frogak edo argumentuak emateaz. Bigarrena ere egiten dugu, jakina, probak edo saiakerak edozein zientziaren parte dira. Baina frogapen bat ez da saiakera edo test bat, argumentazio bat baizik, zeinak zerbait egia dela ziurtatzen duen.

Zientziaren gehiengoa, esan bezala, neurri handi batean, bigarren adieraren zentzuan ari da zerbait frogatu duela dionean. Izan ere, bizitza errealean noiz ziurta dezakegu zerbait EGIA dela? Zerbait zientifikoki frogatuta dagoela esaten denean, momentuz egin diren esperimentu denek hala adierazi dutela esan nahi du; edo kasu gehienetan hala gertatu dela. Edo hurbilpen on edo orokorpen on bat dela. Baina zaila da zerbait BETI egia edo %100 egia dela ziurtatzea. Matematika abstraktua da hori gertatzen den leku edo espazio bakarra. Baina nola da hori posible?

Tira, "tranpa" egiten dugulako, neurri batean. Izan ere, matematikariok gauzak egiak direla frogatzen dugu, bai. Baina beti ere zerbaitetan oinarrituz, edo zerbait egia dela suposatuz. Ez ditugu egia absolutuak hutsetik frogatzen, baizik eta zenbait enuntziatu egia direla asumituz. Enuntziatu horiei axioma esaten zaie, eta horregatik esaten da maiz axiomak daudela matematikaren oinarrian. Axiomak dira frogapenik gabe egiatzat onartzen ditugun enuntziatuak. Behin hori onartuta, horren gainean beste enuntziatu batzuk egia direla frogatzeko gai gara.

Horretarako, jakina, arau logiko batzuk adostu beharko ditugu, jakiteko frogapen bat noiz den onargarria edo zuzena eta noiz ez. Arau horiek dira, hain zuzen ere, aurretik aipatutako dedukzio logikoaren arauak. Arau zorrotzik ezean, posible litzateke zerbait egia eta gezurra dela frogatzeko gai izatea. Eta, jakina, ez dugu halako matematikarik eraiki nahi. Baina nondik hasi adostasun horretara iristeko?

Ikus dezagun adibide bat. Demagun ondoko galdera suertatzen zaigula:

Edozein zenbaki bikoitiren karratua, bikoitia al da berriz?

Tira, lehen gauza ezagutzen ditugun lehen zenbaki bikoitiekin konprobatzen hastea litzateke.

$$2^2 = 4, \qquad 4^2 = 16, \qquad 6^2 = 36, \qquad 8^2 = 64$$

Hauetako bakoitzak galderari baietz erantzuten dio bere kasu konkreturako, baina frogatzen ote du honek enuntziatua? Galdera izan balitz ea zenbaki bikoiti *batzuen* karratua bikoitia den, orduan bai. Baina enuntziatuak *denei* buruz galdetzen digu aldi berean.

Nola frogatu, baina, zerbait aldi berean infinitu zenbakirentzako? Garbi dago adibideak banan-banan konprobatzeak ez digula lagunduko horretan. Hasteko, enuntziatu dezagun galdera baieztapen gisa:

Edozein zenbaki bikoitiren karratua, bikoitia da.

Saia gaitezen orain, modu matematikoago batean idazten. Horretarako lagungarria izaten da *edozein* horri izen abstraktu bat ematea:

Baldin eta n zenbaki bat bada, n bikoitia izanik, orduan n^2 bikoitia da.

Esaldi hau gure enuntziatuaren baliokidea da, baina orain, n izena eman diogun horrentzako frogatzeko gai baldin bagara, nola n izen bat besterik ez den, benetan horrelakoak diren n *guztientzako* ariko gara aldi berean enuntziatua frogatzen.

Eman lezake ez dugula gehiegi aurreratu frogapenaren bidean. Baina aurreko pausua beharrezkoa zen ondorengoa emateko. Eta ondorengo urratsa da klabea. Enuntziatua zenbaki bikoitiei buruzkoa bada, gure buruari galdetu behar diogun hurrengoa zera da: *zer da zenbaki bat bikoitia izatea?* Edo beste era batera esanda, zein da zenbaki bikoiti izatearen *definizioa*?

Definizioak dira matematikaren beste atal ezinbesteko bat. Zenbaki bikoiti bat honela defini dezakegu:

Definizioa 1.1.1. Zenbaki oso bat, n, bikoitia dela diogu, baldin eta $n = 2m$ baldin bada, m beste zenbaki oso bat izanik.

Eta orain bai, orain badauzkagu osagai denak gure frogapena egiteko. Kasu askotan ez, baina honetan adibidez, ohartuko gara, frogapenaren benetako lana eginda daukagula dagoeneko. Benetan garrantzitsua zena berridazketa eta definizioa idaztea zela. Izan ere, ondokoa litzateke enuntziatua eta bere froga. Bide batez, normalean egia direla frogatuko dugun enuntziatuari *proposizio* esaten zaio. Enuntziatua garrantzitsua den kasuetan *teorema* izena ematen zaio.

Proposizioa 1.1.2. *Baldin eta n bikoitia den zenbaki oso bat bada, orduan n^2 ere bikoitia da.*

Froga. Izan bedi n zenbaki bikoiti bat. [1]

[1] Ohartu BAT esaten dugula, baina letra mutua denez, benetan esan genezakeen EDOZEIN. Hizkera hau lagungarria da sarri.

Izan bedi, beraz, n edozein zenbaki bikoiti. Bikoitia denez, definiziotik, badakigu $n = 2m$ itxurakoa dela, m zenbaki osoa izanik. Baina orduan,

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2),$$

eta $2m^2$ zenbaki oso bat denez, n^2-k betetzen du bikoiti izatearen definizioa, eta frogatuta geratu da enuntziatua. $\square$

Notazioa 1.1.3. Ohartu frogapenaren bukaeran lauki zuri bat ageri dela. Hori erabiltzen da frogapena bukatu dugula adierazteko. Batzuek karratu beltz bat jarri ohi dute, eta beste batzuetan Q.E.D. ikusiko duzue, latinezko "quod erat demonstrandum" inizialetatik, "frogatu nahi genuen bezala" esan nahi duena.

Oharra 1.1.4. Kontuan izan frogapenean zehar zenbait gauza suposatutzat eman ditugula. Hain zuzen ere, suposatu dugu zenbaki osoen biderketa elkarkorra eta trukakorra dela, bestela karratura jasotzea ez litzateke automatikoa izango. Suposatu dugu ere, bi zenbaki osoren biderkadura berriz osoa dela, bestela ezingo genuke esan $2m^2$ osoa denik. Agerikotzat dauzkagun gauzak dira, ohituta gaudelako zenbaki osoekin kalkuluak egiten, baina hori ere nolabait arautu eta hitzartu beharra dago. Aurrerago ikusiko dugu, zenbaki osoen axiomatizazioa ikusterakoan.

1.2 Oinarrizko notazioa

Matematika adierazteko gauza garrantzitsuenetako bat erabili ohi den lengoaia unibertsala da. Zenbait gauza adierazteko sinboloak erabiltzen dira, eta hemen zerrendatuko ditugu horietako garrantzitsuenak, nahiz eta bakoitza dagokion unean berriz definituko dugun:

Sinboloa	Izena	Adibidea	Esanahia
$=$	berdintza	$x = y$	x eta y berdinak dira
$\neq$	ezberdintza	$x \neq y$	x eta y ez dira berdinak
$\leq$	txikiago berdin	$x \leq y$	x y baino txikiago edo berdina da
$\geq$	handiago berdin	$x \geq y$	x y baino handiago edo berdina da
$<$	txikiago	$x < y$	x y baino hertsiki txikiagoa da
$>$	handiago	$x > y$	x y baino hertsiki handiagoa da
$\subseteq$	azpimultzoa	$A \subseteq B$	A B-ren azpimultzoa da
$\in$	elementua	$a \in A$	a A-ko elementua da
$\forall$	edozein	$\forall\, a$	a guztietarako
$\exists$	existitzen da	$\exists\, a$	existitzen da a
$\exists!$	existitzen da bakarra	$\exists!\, a$	existitzen da a bakarra
$\neg$	ez (ukapena)	$\neg P$	ez P (P gezurra)
$\wedge$	eta (konjuntzioa)	$P \wedge Q$	P eta Q
$\vee$	edo (disjuntzioa)	$P \vee Q$	P edo Q

1.3 Enuntziatuak

Gainetik bada ere, aipatu dugu enuntziatuak egitea bera garrantzitsua dela. Baina defini dezagun, zehatzago, zer izango den guretzako enuntziatu bat.

Definizioa 1.3.1. Proposizio edo enuntziatu bat deklarazio bat egiten duen esaldi bat da, zeina egia ala gezurra den.

Adibideak lagungarri izaten dira abstraktutasunean lanean ari garenean. Ikus ditzagun, beraz, enuntziatuen zenbait adibide.

Adibideak 1.3.2.

- Marie Curie-k ez zuen nobel saririk irabazi.
- Lehen mundu gerra 1914an hasi zen.
- 18 zenbaki lehena da.
- Euskara hizkuntza zaila da.
- Zenbaki bakoitiak bikoitiak baino politagoak dira.

Hauek denak, matematikoak ez, baina proposizioak dira. Tira, hirugarrena da matematikoa den bakarra. Besteen kasuan, batzuk "objektiboagoak" irudituko zaizkigu besteak baino, baina denak dira egia ala gezurra izan daitezkeen sententziak. Jakina, bakoitzaren egiazkotasuna eztabaidatzerako orduan definizioak beharrezkoak dira. Denok daukagu garbi zer den nobel sari bat, baina hizkuntza bat zaila izatea edo zenbaki bat polita izatea ez. Beraz, sarritan, halako enuntziatuez eztabaidatzerakoan, ez da soilik bere egiazkotasunaz eztabaidatzen, gehienetan definizioari buruzko eztabaida izaten da. Horregatik izango da garrantzitsua matematikan definizio *onak* ematea. Eztabaida egiazkotasunean zentratu dadin erabat.

Notazioa 1.3.3. Enuntziatuez orokorrean hitz egitea interesatuko zaigu, lehenago zenbaki bikoiti guztiez n baten bidez hitz egin dugun gisan. Kasu honetan, ohitura da enuntziatuak $P, Q, R...$ letren bidez adieraztea.

Egiazkotasun taulak

Enuntziatu bat egia edo gezurra izan daitekeenez, sarritan enuntziatu taulak lagungarri egingo zaizkigu. Enuntziatu taula batean, besterik gabe enuntziatu bat egia edo gezurra denean, besteak nolakoak diren adierazten da.

Adibidea 1.3.4. Izan bitez ondoko enuntziatuak: *P: Zenbaki bakoitiak bikoitiak baino politagoak dira* eta *Q: Euskara hizkuntza zaila da.* Orduan ondoko egiazkotasun taula izan dezakegu:

P	Q
E	G
G	G

Taularen interpretazioa litzateke, zenbaki bakoitiak politagoak direla egia denean, gezurra dela euskara hizkuntza zaila izatea. Eta gezurra denean bakoitiak politagoak direla, kasu horretan ere gezurra izaten jarraitzen duela euskara hizkuntza zaila dela dion enuntziatua.

Adibide honek ez dauka inolako zentzu ez logiko ez matematikorik, baina aurrerago ikusiko dugun bezala, taula hauek oso erabilgarriak dira.

Enuntziatu baliokideak

Definizioa 1.3.5. Izan bitez P eta Q bi enuntziatu. P eta Q *logikoki baliokideak* direla edo zuzenean *baliokideak* direla diogu, baldin eta biak egiak edo biak gezurrak badira. Hau gertatzen den kasuan, honela adieraziko dugu

$$P \iff Q,$$

eta honela irakurri: *P baldin eta soilik baldin Q.* Aurrerago ikusiko dugu esateko modu honen zergatia.

Taulak erabiliz, bi enuntziatu baliokideak direla esango dugu egiazkotasun taula bera badaukate. Aurreko adibidean P eta Q ez dira enuntziatu baliokideak, ez daukatelako egiazkotasun taula bera.

Enuntziatu irekiak

Adibideak pentsatzeak laguntzen duen gisan, askotan ez-adibideetan pentsatzea ere komenigarria da. Enuntziatuak ez dira, adibidez *2020ko urtarrilaren 8a* edo *Amaiaren lehengusuaren jaka beltza.* Ez direlako egia ala gezurra direla erabaki dezakegun esaldiak.

Aurreko paragrafoko bi adibideak ez dira matematikoak, baina badira enuntziatuak ez diren esaldi matematikoak ere. Esate baterako $x + 1 = 2$ esaldi matematiko bat da, baina ez da enuntziatu bat. Hor x aldagai bat da. Jakina, x zer zenbaki den esaten badugu, orduan esaldia enuntziatu bihurtuko da. Baina zehaztu ezean, ez da enuntziatu bat. Askotan interesatuko zaigu aldagaien menpeko esaldiak eraikitzea. Hala, demagun

$$P(x) \equiv x + 1 = 2,$$

esaldia adierazteko erabiltzen dugula. Orduan $P(1)$ enuntziatu bat da, eta egia da. Baina $P(0)$ ere enuntziatu bat da, kasu honetan gezurra dena.

Definizioa 1.3.6. Aldagai baten (edo batzuen) menpeko esaldiei *enuntziatu ireki* esango diegu.

1.3.1 Zenbakitzaileak

Esan bezala, enuntziatu irekiak ez dira enuntziatuak. Baina enuntziatu bihur daitezke nahiko modu erraz batean. Aurreko adibideari jarraituz, esan genezake adibidez *Existitzen da x zenbakia non $P(x)$.* Enuntziatu hau egia litzateke, izan ere, existitzen da x zenbakia, 1, adibidez, non $x + 1 = 2$ den. Esaldi ireki bat enuntziatu bihurtzeko beste modu bat, guztientzako betetzen dela aldarrikatzea litzateke. Adibidez, *Edozein x zenbaki arruntentzako, $P(x)$.* Hau enuntziatu bat da, kasu honetan, gezurra. Izan ere, $x = 2$ zenbakia arrunt da, baina $P(2)$ gezurra da. Beraz, ez da egia zenbaki arrunt guztientzako $P(x)$ betetzen denik.

Definizioa 1.3.7. (i) *Zenbakitzaile existentzial* esaten zaio, eta $\exists$ baten bidez adierazten da, enuntziatu ireki bateko aldagaiari buruzko existentzia aldarrikatzen duenari.

(ii) *Zenbakitzaile unibertsal* esaten zaio, eta $\forall$ baten bidez adierazten da, enuntziatu ireki bat aldagai guztientzako betetzen dela aldarrikatzen duenari.

Oharra 1.3.8. Batzuetan interesatuko zaigu, zerbait existitzen dela aldarrikatzerakoan, existitzen den objektu edo elementu hori bakarra dela adieraztea. Orduan $\exists!$ idatzi ohi da. Harridura ikur horrek adierazten du existitzen den elementua bakarra dela.

Notazioa 1.3.9. Zerbait ez dela existitzen ere esatea interesatuko zaigu kasu batzuetan. Orduan $\nexists$ baten bidez adieraziko dugu.

Adibideak 1.3.10. (i) "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" enuntziatuak zera adierazten du: *edozein zenbaki errealen karratua positiboa da,*

(ii) "$\exists!\ n \in \mathbb{N}, n+8=12$" enuntziatuak, aldiz: *zenbaki arrunt bakarra existitzen da 8-ari batuz 12 ematen duena.*

Ariketa 1.i. Zein dira goiko bi adibideetako enuntziatu irekiak?

Batzuetan *guztietarako* edo *edozeinentzako* ez doaz esaldiaren barruan, baina bai inplizituki. Adibidez, lehen atalean frogatu dugun esaldia honelakoa zen

Baldin eta n bikoitia den zenbaki oso bat bada, orduan n^2 bikoitia da.

Hemen *baldin eta...* erabili dugu, baina benetan zenbakitzaile unibertsal bat dago inplizituki, *edozein zenbaki bikoitirentzako* diona. Honelako kasu gehiago ere ikus daitezke ohiko hizkera matematikoan:

Adibideak 1.3.11. (i) Triangelu batek hiru alde ditu. *Benetan edozeinek dituela esaten ari gara!*

(ii) Zenbaki erreal baten karratua positiboa da. *Zenbaki erreal guztientzako ari gara aldarrikatzen aldi berean!*

Eta hau ez da zenbakitzaile unibertsalarekin soilik gertatzen. Gutxiagotan, baina existentzialarekin ere gertatzen da:

Adibideak 1.3.12. (i) Zenbaki batzuk 3-ren multiploak dira. *Benetan esaten ari garena da existitzen dela 3-ren multiploren bat!*

(ii) Baldin eta n zenbaki oso bat bada, badago m zenbaki oso bat n baino handiagoa dena. *Hemen biak ari gara aldi berean nahasten, EDOZEIN zenbaki osorentzat EXISTITZEN da bera baino handiago bat!*

Biak konbinatu ditzakegu, beraz. Ohartu, konbinatzerakoan, ordena garrantzitsua dela. Baldin eta $P(x,y)$ enuntziatu ireki bat bada, ez dira gauza bera

$$\forall x, \exists y, P(x,y),$$

edo

$$\exists y, \forall x, P(x,y).$$

Adibidea 1.3.13.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y$$

esaldia egia da, baina

$$\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x = y$$

ez. Lehenak dio edozein zenbaki errealetarako existitzen dela bere berdina den bat (egia, bere burua). Baina bigarrenak dio existitzen dela zenbaki erreal bat, beste edozein zenbaki erreali berdina dena. Hau ez da posible! Existituko balitz halako y bat $y = 1 = 2$ litzateke eta $1 = 2$ gezurra da zenbaki errealetan.

Egia dena da, existentzial bi jarraian edo unibertsal bi jarraian badaude, orduan bai trukatu ditzakegula enuntziatuak berdina izaten jarraituz.
Ariketa 1.ii. Konprobatu goian esandakoa betetzen dela adibide konkretuetan. [2]

1.3.2 Ukapena

Definizioa 1.3.14. Baldin eta P enuntziatu bat bada, P*-ren ukapena* edo *ezeztapena*, beste enuntziatu bat da $\neg P$ adieraziko duguna, eta "P gezurra da" diona.

Alternatiboki, esan genezakeen "P ez da egia". Baldin eta enuntziatu bat egia izatea E bidez adierazten badugu eta gezurra izatea G bidez, honako taula honek adieraziko luke P enuntziatu baten eta bere ukapenaren arteko erlazioa:

P	¬P
E	G
G	E

Hau da, bietako bat P edo $\neg P$ egia da, eta soilik bietako bat.

Esaldiak ukatzea ez da beti lan erreza izaten, bizitza errealean ere ez. Adibidez, *Marie Curiek ez zuen Nobel saririk irabazi* esaldiaren ukapena *Marie Curiek gutxienez Nobel sari bat irabazi zuen* izango litzateke. Badakigu bi irabazi zituela, baina formalki, *Marie Curiek bi Nobel sari irabazi zituen* EZ da hasierako esaldiaren ukapena. Bestela, biren lekuan edozein zenbaki jarrita ere lor genezake ukapena, eta kasu horietan ohartu hasierako esaldia eta bere ukapena biak izango liratekeela gezurrak, eta hori ezin da gertatu!

Gatozen adibide matematikoetara, hori izango baita gure zeregina, eta errezagoa baita ohiko esaldiak ukatzea baino. Berdintza baten ukapena, desberdintza da. Adibidez, $3+1=4$-ren ukapena $3+1\neq 4$ da. Zein da, adibidez, *baldin eta n bikoitia bada, n^2 bikoitia da* esaldiaren ukapena? Hitzez esanda esan genezake honelako zerbait: *ez da egia n bikoiti guztietarako n^2 bikoitia denik.* Baina horrek ez digu gehiegi laguntzen hori nola frogatuko genukeen pentsatzerako garaian. Ohartu, zerbait guztientzako egia ez dela frogatu nahi badugu, esaten ari garela existitzen dela gutxienez adibide bat enuntziatu hori gezurtatzen duena. Alegia, zenbakitzaile unibertsalaren ukapena existentzial bat dela! Hau izango litzateke enuntziatuaren ukapena:

Existitzen da zenbaki bikoiti bat, n, zeinentzako n^2 ez den bikoitia.

Ohartu existentziala bihurtzeaz gain, gure enuntziatu irekia ukatu dugula. Lehen $P(n) \equiv n^2$ *bikoitia da*, geneukan eta orain $\neg P(n) \equiv n^2$ *EZ da bikoitia.* Alderantziz ere gertatzen da, existentzial baten ukapena, unibertsal bat bihurtzen da.
Ariketa 1.iii. Aurkitu ondoko enuntziatu matematikoen ukapena, eta erabaki beraiek ala ukapena, bietako zein den egia eta zein gezurra:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x+8=1.$

(ii) Triangelu batek 3 alde ditu.

[2] Ohartu horrek ez duela frogatuko kasu orokorra! Baina zuei enuntziatuak eraiki eta irakurtzeko praktika hartzen lagunduko dizue.

(iii) $\forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$.

(iv) Bi zenbaki bakoitiren batura bakoitia da.

(v) Edozein polinomio funtzio jarraitua da puntu guztietan.

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ non $x \leq n$.

Aurretik komentatutakoaren arabera, ondoko proposizioa izango genuke:

Proposizioa 1.3.15. *Izan bedi $P(x)$ enuntziatu irekia. Orduan*

(i) $\neg(\forall x, P(x)) \iff \exists x\,(\neg P(x))$,

(ii) $\neg(\exists x, P(x)) \iff \forall x\,(\neg P(x))$.

Horrez gain, ohartu

$$\neg\neg P \iff P$$

daukagula. Izan ere, taula eraikiz gero,

P	¬P	$\neg\neg P$
E	G	E
G	E	G

daukagu, eta garbi dago lehen eta hirugarren enuntziatuek egiazkotasun taula bera dutela. *Bi aldiz ezeztatzearen legea* esaten zaio honi.

Aipa ditzagun bukatzeko beti egia edo beti gezurra diren enuntziatuak. Lehen kasuari *tautologia* esaten zaio, eta bigarrenari *kontraesan*. Alegia, beti egia den enuntziatu bat tautologia bat da, eta beti gezurra dena kontraesana. Honen adibide ezagunenak honakoak dira:

$$P \text{ edo } \neg P,$$

garbi dago tautologia dela, izan ere, P egia bada argi dago enuntziatua egia dela, baina P ez bada egia, orduan $\neg P$ egia da. Bestalde,

$$P \text{ eta } \neg P,$$

kontraesana da beti. Izan ere, ez da logikoki posible P eta $\neg P$ biak aldi berean egia izatea. Beraz, $P \wedge \neg P$ enuntziatua beti da gezurrezkoa. Aurrerago ikusiko dugu lagungarria dela zenbait frogapenetan kontraesanak bilatzea. Honi buruz ariko gara kontraesan bat bilatuko dugula diogunean, zerbait aldi berean egia eta gezurra dela frogatzen saiatzeaz.

1.3.3 Konjuntzioa eta disjuntzioa

Enuntziatu sinpleetatik konplexuak ere eraiki ditzakegu, eta horren adibiderik sinpleena goian azaldu zaizkigun "edo" eta "eta" horiek dira. Alegia, gustatuko litzaiguke esan ahal izatea noiz diren bi gauza aldi berean egia, edo noiz den gutxienez bietako bat egia. Horretarako, ohiko hizkuntzan *eta* eta *edo* erabili ohi ditugu, eta matematikan ere antzerako zerbait gertatzen da. Kontua da formalki definitu beharko dugula gure kasuan zer esan nahiko duen bi hitz horietako bakoitzak.

Definizioa 1.3.16. Izan bitez P eta Q bi enuntziatu. Orduan:

(i) *P eta Q-ren konjuntzioa*, $P \wedge Q$ bidez adierazi eta "P eta Q" irakurriko duguna, enuntziatu berri bat da "P eta Q biak egia dira" diona.

(ii) *P eta Q-ren disjuntzioa*, $P \vee Q$ bidez adierazi eta "P edo Q" irakurriko duguna, enuntziatu berri bat da "P egia da edo Q egia da" diona.

Ohartu, $P \wedge Q$ egia izan dadin, P egia izan behar dela, eta baita Q ere. Modu bakarra dago, beraz, $P \wedge Q$ egia izan dadin. Ordea, hiru modu edo konbinazio ezberdin daude $P \wedge Q$ gezurra izateko. Gerta liteke P egia eta Q gezurra izatea, P gezurra eta Q egia edo biak gezurrak.

Aldiz, $P \vee Q$ egia izan dadin, hiru konbinazio posible daude, bietako bat egia eta bestea gezurra izatea (bi aukera) eta biak aldi berean egia izatea. Kasu honetan, $P \vee Q$ gezurra izan dadin, modu bakarra dago, biak gezurra izatea.

Ondoko egiazkotasun taulan laburbil daiteke goian esandakoa:

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$
E	E	E	E	G	G
E	G	G	E	E	G
G	E	G	E	E	G
G	G	G	G	E	E

Ohartu, orain, erlazio bat ezar dezakegula ezeztapen, *eta* eta *edo*-ren eta beraien ukapenen artean. De Morgan-en legeak bezala dira ezagunak, eta aurrerago multzoekin ere antzera betetzen dela ikusiko dugu.

Proposizioa 1.3.17. *Izan bitez P eta Q bi enuntziatu. Orduan:*

(i) $\neg(P \wedge Q)$ *eta* $(\neg P) \vee (\neg Q)$ *baliokideak dira.*

(ii) $\neg(P \vee Q)$ *eta* $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ *baliokideak dira.*

Froga. Enuntziatu hau frogatzeko aski da taulak eraiki eta aipatzen ditugun enuntziatuen zutabeak bat datozela ikustea (aurrerago zehaztuko dugu hobeto baliokidetasunarena). Azpiko taulak frogatuko luke (i), izan ere, azken bi zutabeak berak dira:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	P ∧ Q	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
E	E	G	G	E	G	G
E	G	G	E	G	E	E
G	E	E	G	G	E	E
G	G	E	E	G	E	E

□

Ariketa 1.iv. Eraiki (ii) atala frogatuko lukeen taula.

Ikus ditzagun adibide matematiko eta ez matematiko batzuk jarraian.

Adibidea 1.3.18. Demagun ondoko enuntziatuak ditugula:

P: Afrika kontinente bat da.

Q: Afrika pertsona izena da.

R: Afrika hitzak 7 letra ditu.

Argi eta garbi, P egia da. Q ere egia da, bada Afrika izeneko jendea. Azkenik R gezurra da, 6 letra dauzkalako. Honetatik abiatuz, nahi ditugun konbinazio posible guztiak eraiki ditzakegu. Ohartu parentesiak garrantzitsuak direla, ukatzen duguna zer den eta lehentasuna zerk duen jakiterako garaian. Adibidez, goiko kasuan $(P \vee Q) \wedge R$ gezurra da, baina $P \vee (Q \wedge R)$ egia.

$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \wedge R$	$\neg R$	$(\neg R) \wedge P$	$\neg(R \vee P)$	$(\neg P) \vee [((\neg R) \vee P) \wedge Q]$
E	E	G	E	E	G	E

Konjuntzio, disjuntzio eta ukapena enuntziatu irekiei ere aplika diezazkiekegu. Adibidez $P(x) : x \leq 3$ eta $Q(x) : x^2 < 2$ badira, $P(x) \wedge Q(x) : x \leq 3$ eta $x^2 \leq 2$ enuntziatu irekia izango litzateke. Edo $\neg P(x) : x > 3$, etab. "Itxi" nahi bagenitu, kuantifikatzaileen bidez egin genezake, eta hala enuntziatuak lortuko genituzke. Adibidez,

$$\exists x \in \mathbb{R} : (P(x) \vee (\neg Q(x))) \equiv \text{existitzen da } x \in \mathbb{R} \text{ non } x \leq 3 \text{ edo } x^2 \geq 2.$$

1.3.4 Enuntziatu konposatuak

Ohartu Proposizioa 1.3.15 eta Proposizioa 1.3.17 elkartuta, ondoko proposizioa lortzen dugula:

Proposizioa 1.3.19. *Baldin eta $P(x)$ eta $Q(x)$ bi enuntziatu ireki badira, orduan:*

(i) $\neg(\forall x\ (P(x) \vee Q(x))) \Longleftrightarrow \exists x\ ((\neg P(x)) \wedge (\neg Q(x)))$,

(ii) $\neg(\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))) \Longleftrightarrow \exists x\ ((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))$,

(iii) $\neg(\exists x\ (P(x) \vee Q(x))) \Longleftrightarrow \forall x\ ((\neg P(x)) \wedge (\neg Q(x)))$,

(iv) $\neg(\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))) \Longleftrightarrow \forall x\ ((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))$,

Honela, adibidez,

Edozein zenbaki arrunt bikoitia da edo hiruren multiploa da

esaldia gezurra dela frogatu nahiko bagenu, hau da frogatu beharko genukeena:

Existitzen da zenbaki arrunt bat ez dena bikoitia eta ez dena hiruren multiploa.

Hau da, zenbaki bakoiti bat topatu beharko genuke, hiruren multiploa ez dena, esaterako 5-a. Eta hori aski litzateke lehen esaldia gezurra dela frogatzeko.

Azter dezagun sakonago edozein eta existentziala nola uztartzen diren konjuntzio eta disjuntzioarekin. Ohartu, adibidez, edozein elementurentzat bi enuntziatu aldi berean egia izatea eta bi enuntziatuak edozein elementurentzat egia izatea baliokideak direla. Alegia, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ eta $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ baliokideak dira. Baina $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ eta $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ ez dira baliokideak. Ez da gauza bera edozein elementuk bat edo beste betetzea eta edozein elementuk bata edo edozeinek bestea betetzea. Pentsa dezagun adibide bat non hauek biak ez diren baliokideak:

Adibidea 1.3.20. Argi dago edozein zenbaki arrunt bakoitia edo bikoitia dela. Hau da, $P(n)$ $: n$ *bikoitia da* eta $Q(n)$ $: n$ *bakoitia da* badira, egia da $\forall n\,(P(n) \vee Q(n))$. Aldiz, $\forall n\, P(n) \vee \forall n\, Q(n)$ esaldiak esan nahiko luke *zenbaki guztiak bikoitiak dira* esaldia edo *zenbaki guztiak bakoitiak dira* esaldietako bat gutxienez egia dela; baina biak dira gezurra.

Antzera gertatzen da existentzialarekin. Kasu honetan alderantziz, existentziala disjuntzioarekin *ondo* portatzen da, baina konjuntzioarekin ez.
Ariketa 1.v. Pentsatu adibide bat zeinetarako

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \text{ eta } \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

ez diren baliokideak.

1.4 Inplikazioak

Orain arte enuntziatu bat noiz den egia eta noiz gezurra aritu gara aztertzen. Baita enuntziatu berriak sortzerakoan darabiltzagun formulek enuntziatuen egiazkotasunari nola eragiten dioten ere. Hala ere, matematikan gehienetan interesatuko zaiguna da, hasieran esan bezala, noiz garen gai *zerbait egia dela suposatuz beste zerbait egia dela* frogatzeko. Gisa horretako enuntziatuei inplikazio bidezko enuntziatu esaten zaie.

Definizioa 1.4.1. Izan bitez P eta Q bi enuntziatu. *P-k Q inplikatzen du* enuntziatu bat da, $P \Rightarrow Q$ gisan adieraziko duguna, eta "baldin eta P egia bada, orduan Q ere egia da" esan nahi du.

Adibideak ikusi eta inplikazioaren propietateak aztertu aurretik, utz dezagun gauza bat garbi. Matematikariontzat, inplikazioak ez du zertan *kausa-efektu* kontestu bat izan. Printzipioz, gerta daiteke P eta Q enuntziatuek elkarrekin zerikusirik ez izatea. Edo zerikusia izan arren, ez ditugu bata bestearen kausa eta ondorio gisa ulertuko. Debate hori filosofoei uzten diegu. Esaten ari garen bakarra da, P egia den edozein egoeratan Q ere derrigorrez egia izango dela.

Adibideak 1.4.2.

(i) P: 4 bikoitia da,
Q: 6 bikoitia da,
$P \Rightarrow Q$: Baldin eta 4 bikoitia bada, orduan 6 bikoitia da.

(ii) P: Nire kotxea gorria da,
Q: Bihar euria egingo du,
$P \Rightarrow Q$: Baldin eta nire kotxea gorria bada, bihar euria egingo du.

Ikus dezagun orain inplikazioaren egiazkotasun taula. Bistakoa da P egia bada eta Q ere bai, $P \Rightarrow Q$ egia izango dela. Baina noiz izango da enuntziatua gezurra? Argi eta garbi, P egia denean eta Q gezurra. Hau da, P egia bada eta Q gezurra, P-k ez du Q inplikatzen. Bestela esanda $P \Rightarrow Q$ gezurra da. Baina gainerako kasu guztietan egia izango da. Alegia, P gezurra denean, ez da inporta Q zer den, beti beteko da $P \Rightarrow Q$. Nolabait esanda *gezurrak edozer inplikatzen du.* Hau da, segur aski arau anti-intuitiboenetako bat. Aurrerago ikusiko dugu hau justifika dezakeen kasu matematiko bat.

Horrela, hau izango litzateke inplikazioaren egiazkotasun taula:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
E	E	E
E	G	G
G	E	E
G	G	E

Intuitiboa ez izan arren, bizitza errealean darabilgun logikak ere honela funtzionatzen du hein batean. Izan ere, demagun norbaiti esaten diogula:

Bihar eguraldi ona badago mendira joango gara.

Esaldi hori gezurra izateko modu bakarra da bihar eguraldi ona egon eta mendira ez joatea. Alegia, baldintza egia eta ondorioa gezurra izatea. Baina ez badago eguraldi onik eta mendira bagoaz, ez da ezer gertatzen, esaldia ez da gezurra bihurtzen. Eta ez baldin bagoaz ere ez dugu bezperako esaldia gezurtatzen, ez delako eguraldi onik egon.

Ikus dezagun gezur batek egia bat inplikatzearen adibide konkretu bat, intuizioari laguntze aldera.

Adibidea 1.4.3. Demagun $P : 3 = 7$ dela. Garbi dago P gezurra dela. Ikus dezagun orain $P \Rightarrow Q$ non $Q : 0 = 0$ den. $3 = 7$ bada, bi aldeetan 0 biderkatuz ekuazioak egia izaten jarraitzen du. Beraz, $3 = 7 \Rightarrow 3.0 = 7.0 \Rightarrow 0 = 0$. Baina $0 = 0$ egia da! Hau da, gezur batetik abiatuz egia bat frogatu dugu. Taulak diona da, formalki, ez $0 = 0$ soilik, baizik eta egiazko edozein enuntziatu froga dezakegula.

Eta taulak are gehiago dio, izan ere P eta Q gezurrak izanik $P \Rightarrow Q$ egia da. Hau da *Baldin eta 3=3 bada, orduan lurra laua da* esaldia gezurra da, baina *Baldin eta 3=7 bada, orduan lurra laua da* esaldia egiazkotzat hartzen dugu. Azken batean, biak direlako gezurrak. Horregatik esaten da "gezurrak edozer inplikatzen du" esaldia. Gezur batetik edozer ondoriozta daitekeelako. Jakina, gure eta matematikarion interesa ez da gezurretatik abiatuta gauzak ondorioztatzea, alderantziz baizik. Baina definitu beharra dago kasu bakoitzean zer gertatzen den, eta logikak ondo funtzionatzeko komeni da onartzea gezurrek edozer inplikatzen dutela.

Are gehiago, normalean, inplikazioak frogatzerakoan, gisa honetakoak frogatzen egongo gara interesatuta: $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Alegia, edozein x-rentzako, $P(x)$ egia bada, orduan $Q(x)$ ere egia dela. Ohartu, x-ren a balio konkretu baterako $P(a)$ gezurra bada, automatikoki daukagula $P(a) \Rightarrow Q(a)$. Beraz, benetan $P(x)$ egia den kasuez baino ez dugu arduratu behar $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ frogatzeko. Kasu honetan, $P(x)$-ri hipotesia esaten zaio eta $Q(x)$-ri ondorioa.

Ikus dezagun dagoeneko ikusita daukagun adibide bat:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ bikoitia } \Rightarrow n^2 \text{ bikoitia.}$$

Kasu honetan $P(n)$: *n bikoitia da* eta $Q(n)$: *n^2 bikoitia da* dira. Ohartu, $P(n)$ ez dela egia n guztietarako, baina egia da $P(n)$ egia den n guztietarako $Q(n)$ ere egia dela. Eta nola $P(n)$ gezurra den kasuetan "dohainik" daukagun $Q(n)$ egia dela, frogatuta daukagu n guztientzako. Hau da, benetan argumentua edo froga, hipotesia egia den kasuetan baino ez dugu egin behar.

Ikus dezagun aldagai bat baino gehiago dauzkaten enuntziatuen kasu bat.

Adibidea 1.4.4. Har dezagun ondoko enuntziatua eta froga dezagun

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, n, m \text{ bakoitiak } \Rightarrow n + m \text{ bikoitia.}$$

Froga. Izan bitez $n, m \in \mathbb{Z}$ eta demagun bakoitiak direla *(hemen $P(n,m)$ egia dela suposatzen ari gara, hori delako gure helburua, hori egia den kasuetarako $Q(n,m)$ ere egia dela ikustea).*

Orduan, badakigu existitzen direla k, l zenbaki osoak, non $n = 2k + 1$ eta $m = 2l + 1$ diren. *(Gogoratu, bikoiti izatearen definizioa bi bider beste zenbaki oso bat izatea den gisan, bakoiti izatea defini dezakegu 2 bider zerbait + 1 izatea bezala.)*

Orain, $n + m = (2k + 1) + (2l + 1) = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1)$, eta beraz, $n + m$ bikoitia da. *(Hasierako adibidean bezala, hemen zenbakien batura eta biderketari buruz dakizkigun propietateak erabili ditugu.)* □

Kontradibidea

Ikus dezagun orain nola frogatu inplikazio bat gezurra dela. Taulari begiratuta, garbi dago inplikazio bat gezurra izateko posibilitate bakarra dagoela: P egia izatea eta Q gezurra. Beraz, $\neg(P \Rightarrow Q)$ eta $P \wedge \neg Q$ enuntziatu baliokideak dira, egiazkotasun taula bera dute. Egin ariketa gisa konprobazioa.

Beraz, aurrekoaren gisako enuntziatu bat gezurtatu nahiko bagenu,

$$\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

gezurra dela frogatu beharko genuke. Badakigu $\neg(\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x)))$ frogatzearen baliokidea dela, eta Proposizioa 1.3.15-gatik, hori frogatzea eta

$$\exists x, \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

frogatzea baliokideak dira. Aurreko paragrafoan esandakoa baliatuz, beraz, aski genuke $\exists x, P(x) \wedge \neg Q(x)$ frogatzearekin. Hau da, x bat topatu beharko genuke, zeinentzako $P(x)$ egia den, baina $Q(x)$ gezurra. Hau askotan erabiltzen den estrategia da, eta elementu horri izen berezia ematen zaio:

Definizioa 1.4.5. $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ enuntziatua gezurtatzen duen elementu bat, enuntziatu horrentzako *kontradibidea* dela esaten da. Alegia, a elementua $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ enuntziatuaren kontradibidea da baldin eta $P(a) \wedge \neg Q(a)$ egia bada.

Oharra 1.4.6. Kontradibideak orokorrean ez dute zertan bakarrak izan, asko egon daitezke. Hori bai, aski da bakarra aurkitzearekin, existentzial bat frogatzen ari garelako. Ez da beharrezkoa kontradibide guztiak aurkitzea.

Adibidea 1.4.7. Demagun honako enuntziatu hau ematen digutela:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n + m \text{ bikoitia } \Rightarrow nm \text{ bakoitia.}$$

Hasteko, honelako enuntziatu baten aurrean bi aukera daude, edo egia da edo gezurra. Egia dela uste badugu, frogatzen ahaleginduko gara. Gezurra dela uste badugu, kontradibide bat bilatuko dugu. Ez dago modurik jakiteko zein bide hautatu hasieran. Intuizioak eta esperientziak laguntzen dute, baina batzuetan traizionatu ere egin gaitzakete.

Ikus dezagun kasu honetan enuntziatua gezurra dela, horretarako kontradibidea emanez. Aurkitu behar ditugu, kasu honetan bi n eta m zenbaki oso, zeinentzako batura bikoitia den, baina biderkadura ere bai. Nahikoa da horretarako biak bikoitiak aukeratzea. Baina nola kontradibidea emateko aski den adibide bakar bat ematea, nahikoa litzateke $n = 2$ eta $m = 4$ ematea. Bikote hori kontradibide bat da goiko enuntziatuarentzat. Izan ere, $P(2, 4) : 2 + 4$ *bikoitia da* egia da, baina $Q(2, 4) : 2.4$ *bakoitia da* gezurra da.

Baldintza beharrezko eta nahikoak

Ikusi dugun gisan, $P \Rightarrow Q$-k adierazten du P egia bada Q egia dela derrigor. Kasu horretan, P Q-rentzako baldintza nahikoa dela esaten da. Nolabait esanda, P gertatzea nahikoa delako Q ere gerta dadin. Alderantziz, Q P-rentzako baldintza beharrezkoa da. Izan ere, P gertatzen bada beharrezkoa da Q gertatzea. Edo, bestela esanda, Q ez bada gertatzen P ez da gertatuko. Hau da, Q gezurra bada, P ere gezurra izango da.

Ohartu, hala ere, $P \Rightarrow Q$ egia izanik, P gezurra izan daitekeela eta Q egia. Honek adierazten du Q ez dela P-rentzako baldintza nahikoa, eta P ez dela Q-rentzako beharrezko baldintza. Hau da, Q gertatzeak ez du ziurtatzen P gertatuko denik; eta gerta daiteke Q P gertatzeko beharrik egon gabe.

Jakina, P aldi berean Q-rentzat baldintza beharrezkoa eta nahikoa bada, edo bestela esanda $P \Rightarrow Q$ eta $Q \Rightarrow P$ aldi berean egia badira, orduan, P eta Q baliokideak dira. Izan ere, P egia bada derrigor Q egia izango da ($P \Rightarrow Q$ dugulako) eta Q egia bada P ere bai ($Q \Rightarrow P$) dugulako. Bestalde, P gezurra bada, Q ere gezurra izan behar da, kasu honetan, bestela $Q \Rightarrow P$ ez litzatekeelako egia izango. Bukatzeko, Q gezurra bada, P ezin da egia izan, $P \Rightarrow Q$ bestela ez litzatekeelako egia. Hau da, bien egiazkotasun taulak baliokideak dira.

Bestela esanda:

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$

Bide batez, $Q \Rightarrow P$ inplikazioari $P \Rightarrow Q$ *inplikazioaren kontrakoa* esaten zaio.

1.5 Zenbait frogapen metodo

Esan bezala, gure helburua maiz $P \Rightarrow Q$ gisako enuntziatuak frogatzea izango da. Garbi izan behar dugu, hasteko, ez dagoela beti funtzionatzen duen bide edo modu bat. Ez dago errezeta bat beti balioko diguna. Bestela aspaldi egongo ziren matematika guztiak idatzi eta frogatuta. Kasu bakoitzean gure intuizio, sormen eta eskura dauzkagun tresnak erabiliz egin beharko diogu aurre enuntziatu bakoitza frogatzerakoan.

Hala ere, badira zenbait argumentazio bide behin eta berriz errepikatzen direnak, eta erabilgarriak izan daitezkeenak orokorrean. Horregatik azalduko ditugu jarraian.

1.5.1 Inplikazio kateak

Bistakoa da, baldin eta $P \Rightarrow Q$ bada gure helburua, baina baldin badakigu $P \Rightarrow R$ eta $R \Rightarrow Q$ egia direla, orduan $P \Rightarrow Q$ ere egia izango dela. Izan ere, P

baldintza nahikoa bada R-rentzako eta R Q-rentzako, orduan P ere izango da Q-rentzako.

Adibidea 1.5.1. Demagun *P(n): n bikoitia da* dela eta *Q(n): n^4 bikoitia da* eta frogatu nahi dugula $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ egia dela.

Dei diezaiogun *R(n): n^2 bikoitia da* enuntziatu irekiari. Orduan, badakigu $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow R(n))$ egia dela. Bestalde $\forall n \in \mathbb{N}, (R(n) \Rightarrow Q(n))$ ere egia da, izan ere, n guztietarako frogatu dugu, bereziki $n^2 \in \mathbb{N}$ denez, egia izango da n^2 bikoitia bada $(n^2)^2 = n^4$ bikoitia dela.

Horiek biak uztartuz ondoriozta dezakegu $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ egia dela.

Oharra 1.5.2. Aurreko adibide eta azalpenean tartean enuntziatu bakarra sartu dugu, baina nahi bezain luzeak diren kateak osa ditzakegu. Hau da, gai bagara

$$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n \Rightarrow Q$$

kateko tarteko inplikazio denak frogatzeko, $P \Rightarrow Q$ frogatuta geratuko da.

1.5.2 Kontrajartzearen metodoa

Egiazkotasun taulak eraikiz gero, erraz ikus daiteke $P \Rightarrow Q$ eta $\neg Q \Rightarrow \neg P$ baliokideak direla. Beraz, kasu batzuetan, $P \Rightarrow Q$ frogatzeko, benetan $\neg Q \Rightarrow \neg P$ frogatuko dugu.

Egiazkotasun tauletan egiaztatzeaz gain, komeni da intuitiboki ulertzea zergatik diren bi hauek baliokideak. Pentsa dezagun adibide ez-matematiko batean:

Adibidea 1.5.3. Demagun

P: *Amaia Bilbon jaio da*
Q: *Amaia Bizkaian jaio da*

enuntziatuak ditugula. Beraz,

$P \Rightarrow Q$: *Baldin eta Amaia Bilbon jaio bada, orduan Amaia Bizkaian jaio da*

enuntziatua litzateke. Bistakoa da enuntziatu hau egia dela, Bilbo Bizkaian dagoelako. Orain $\neg Q \Rightarrow \neg P$ enuntziatua honakoa litzateke

Baldin eta Amaia ez bada Bizkaian jaio, orduan Amaia ez da Bilbon jaio.

Intuizioak garbi adierazten digu kasu honetan bata eta bestea baliokideak direla. Amaia Bilbon jaio bada derrigortuta dago Bizkaian jaiotzera, eta alderantziz, Bizkaian ez bada ezin izan da Bilbon jaio.

Definizioa 1.5.4. Izan bitez P eta Q bi enuntziatu, orduan $\neg Q \Rightarrow \neg P$ enuntziatuari $P \Rightarrow Q$ enuntziatuaren *kontrajarria* esaten zaio.

Ikus dezagun ondoren adibide matematiko pare bat non inplikazio baten ordez bere kontrajarria frogatzea errazagoa den.

Proposizioa 1.5.5. *Izan bitez $x, y \in \mathbb{Z}$. Baldin eta $x + y$ bakoitia bada, orduan x edo y bietako bat, eta bakarra, bakoitia da.*

Froga. Kasu honetan $P : x + y$ bakoitia da, izango genuke eta Q: zehazki bietako bat x edo y bakoitia da. Frogatu nahi duguna, beraz, $P \Rightarrow Q$ da, baina baliokidea denez, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ frogatuko dugu. Idatz dezagun lehenbizi bakoitza:

$\neg Q$: x eta y biak bikoitiak edo biak bakoitiak dira.
$\neg P$: $x + y$ bikoitia da.[3]

Orain, gure helburua $\neg Q \Rightarrow \neg P$ frogatzea izanik, aski da $\neg Q$-ren bi kasuetarako $\neg P$ ondorioztatzea. Biak bikoitiak badira, garbi dago batura ere bikoitia izango dela. Aldiz, biak bakoitiak badira, ere bai. (Saiatu formalki idazten). Beraz, frogatuta geratzen da $\neg Q \Rightarrow \neg P$, hau da $P \Rightarrow Q$. $\square$

Proposizioa 1.5.6. *Izan bedi $n \in \mathbb{N}$. Baldin eta n^2 bikoitia bada, orduan n bikoitia da.*

Froga. Kasu honetan $P : n^2$ *bikoitia da* litzateke eta $Q : n$ *bikoitia da*. Beraien ezeztapenak $\neg P : n^2$ *ez da bikoitia* eta $\neg Q : n$ *ez da bikoitia* lirateke hurrenez hurren. Baina bikoiti ez izatea bakoiti izatea da, eta beraz, frogatu nahi dugunaren enuntziatu baliokidea $\neg Q \Rightarrow \neg P$ honakoa bihurtzen da

baldin eta n bakoitia bada, orduan n^2 bakoitia da.

Eta orain, bakoiti zer den idaztea baino ez dugu behar. Izan ere, n bakoitia bada esan nahi du existitzen dela $k \in \mathbb{N}$ non $n = 2k + 1$ den. Orduan $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ da eta bistakoa da bakoitia dela. $\square$

1.5.3 Kontraesanaren bidezko froga

Aurrerago esan bezala, frogapenetan maiz erabilgarria izango da kontraesan bat bilatzea. Metodo hau *absurdura eramanez* izenez ere ezaguna da. Izan ere, $P \Rightarrow Q$ frogatzeko egiten dena da suposatu P eta $\neg Q$ biak direla egia. Nolabait, guk frogatu nahi dugunaren kontrakoa suposatzen dugu, horregatik esan ohi da "demagun, absurdura eramanez P egia eta $\neg Q$ egia direla". Orduan, dedukzio logiko bidez, helburua da C enuntziatu bat ondorioztatzea; baita $\neg C$ ere. Alegia, $P \wedge \neg Q$ egia dela suposatuz $C \wedge \neg C$ frogatzera iristea. Baina orduan, kontraesan bat frogatuko genuke. Hau da, beti gezurra den esaldi bat egia dela frogatuko genuke. Hori ezin da logikoki zuzena izan. Tarteko arrazoiketak akats logikorik ez badugu egin, derrigorrez abiapuntuak behar du okerra. Alegia $P \wedge \neg Q$ ezin dela egia izan. Baina orduan $\neg P \vee Q$ egia da. Beraz, $\neg P \vee Q$ egia izan behar dela ikusi dugunez, baldin eta P egia bada, Q egia izan behar da. Hau da, $P \Rightarrow Q$ egia da.

Goian azaldutako argumentazioa ondoko teoreman oinarritzen da. Diona da, gure enuntziatuaren ukapenak gezurra inplikatzen duela frogatzea eta gure entzuntziatua frogatzea baliokideak direla.

Teorema 1.5.7. *Izan bedi S enuntziatua eta C gezurra den enuntziatu bat. Orduan $\neg S \Rightarrow C$ eta S enuntziatu baliokideak dira.*

Froga. Baldin eta S egia bada, orduan $\neg S$ gezurra da, eta garbi dago gezurrak gezurra inplikatzen duela. *Gogoratu gezurrak edozer inplikatzen duela.* Orain, S gezurra bada, $\neg S$ egia da, eta ondorioz $\neg S \Rightarrow C$ gezurra da, egiak ez baitu gezurra inplikatzen. Alegia, S eta $\neg S \Rightarrow C$ aldi berean direla biak egia ala biak gezurra; eta ondorioz, definizioz logikoki baliokideak. $\square$

[3]Hemen erabiltzen ari gara edozein zenbaki derrigorrez bakoitia ala bikoitia dela; eta beraz, bakoiti ez izatea eta bikoiti izatea baliokideak dira. Baita bikoiti ez izatea eta bakoiti izatea ere.

Ikus ditzagun metodo honen bidez frogatutako proposizioen adibideak.

Proposizioa 1.5.8. *Baldin eta $n, m \in \mathbb{Z}$ badira, orduan $n^2 \neq 4m + 2$.*

Froga. Kasu honetan, hipotesia da n eta m osoak direla, eta ikusi nahi dugu horrek inplikatzen duela $n^2 \neq 4m + 2$ dela. Absurdura eramanez, demagun n eta m osoak direla eta $n^2 = 4m + 2$ betetzen dela, eta saia gaitezen kontraesan batera iristen.

Hasteko ohartu, $n^2 = 2(2m + 1)$ dela. Beraz, n^2 bikoitia da. Baina lehen ikusi dugunagatik, horrek n bikoitia izatea inplikatzen du. Orain, n bikoitia bada, existitzen da $k \in \mathbb{Z}$ non $n = 2k$ den. Gure ekuazioan ordezkatuz gero, $(2k)^2 = 4m+2$ geratzen zaigu. Hau da $4k^2 = 2(2m+1)$. Bi aldeetan 2-rengatik zatituz, zera daukagu $2k^2 = 2m + 1$. Hau da, zenbaki bikoiti bat, zenbaki bakoitia dela. Hori kontraesana da. □

1.6 Indukzio bidezko froga

Orain arte ikusitako frogapen metodoekin alderatuz ezberdina da indukzio bidezko froga. Aurreko kasu guztietan arrazonamendu deduktiboa erabili dugu; hau da, zerbait egia dela suposatuz beste egia bat ondorioztatzea. Logikan, hala ere, bada kontrako norantzan doan arrazoibide bat ere: arrazonamendu induktibo gisa ezaguna da. Nolabait esateko, zerbait behin eta berriz gertatzen bada, beti gertatzen dela ondorioztatzean datza. Arrazonamendu mota honek baditu arrisku batzuk logikaren ikuspuntutik. Izan ere, zerbait orain arte gertatu izanak ez du zertan ziurtatu gerora ere beteko denik.

Hala ere, metodo deduktiboarekin gertatzen den gisan, bizitza errealerako formalki aplikagarria ez izan arren, matematikoki badago modua dedukzio induktiboa egiteko. Horretarako, lehenbizi zenbaki arruntei buruzko zenbait propietate behar ditugu. Izan ere, gertaera baten "errepikapen" hori zenbaki arrunten bidez deskribatuko dugu, ondoren arrazonamendu induktiboa definitzeko.

1.6.1 Zenbaki arruntak. Peanoren axiomak

Zenbaki arruntak[4] deritzenak guretzat oso ezagunak dira, egunero erabiltzen ditugulako. Matematikoki, baina, definizio zorrotz bat behar dugu zenbaki horientzat. Zenbaki horiek izango dira zenbait propietate edo axioma betetzen dituztenak. Gogoan izan axioma bat egiatzat hartzen dugun zerbait dela, frogapenik ez daukana.

Oraingo kasu honetan, zenbaki arrunten existentzia eta propietateak aldarrikatzen dituzten axiomak zein diren ikusiko dugu. Axioma hauek Peanoren axioma gisa dira ezagunak:

Definizioa 1.6.1 (Peanoren axiomak)**.** Zenbaki arrunten multzoa, $\mathbb{N}$, 1 eta s sinboloek eta ondoko propietateek definitzen dute:

(i) 1 zenbaki arrunta da.

(ii) Edozein n zenbaki arruntentzat, $n = n$ da.

[4] batzuetan zenbaki natural ere esaten zaie

(iii) Edozein n, m zenbaki arruntentzat, $n = m \Rightarrow m = n$.

(iv) Edozein n, m, l zenbaki arruntentzat, $n = m$ eta $m = l$ bada, orduan $n = l$ da.

(v) Edozein a elementu eta n zenbaki arruntentzat, $a = n$ bada, orduan a ere zenbaki arrunta da.

(vi) Edozein n zenbaki arruntentzat, existitzen da $s(n)$ beste zenbaki arrunt bat, n-ren *hurengoa* deitzen dena.

(vii) Edozein n, m zenbaki arruntentzat $s(n) = s(m)$ bada, orduan $n = m$ da.

(viii) Edozein n zenbaki arruntentzat, $s(n) \neq 1$ (hau da, 1 ez da inoren hurrengoa).

(ix) Baldin eta $A \subseteq \mathbb{N}$ azpimultzo batentzat egia bada $1 \in A$ eta $s(a) \in A$ edozein $a \in A$-rentzat, orduan $A = \mathbb{N}$ dugu. Hau da, A zenbaki arrunt guztien multzoa da.

Oharra 1.6.2. Ez dago adostasun zabalik matematikarien artean 0 zenbaki arrunt izendatzeari dagokionez. Batzuek hala onartzen dute eta beste batzuek ez. Edozein kasutan, 0 zenbakia zenbaki arrunt gisa onartu nahiko bagenu aski litzateke goiko axiometan 1-aren lekuan 0 jartzea eta denak berdin funtzionatuko luke.

Azter dezagun sakonago zer esan nahi duen axiometako bakoitzak. Batetik, 1-a zenbaki arrunta dela. Ez da inor harritzeko moduko axioma bat. Bitik laurakoak ere ez dira bitxiegiak, ohituta gauden berdintzaren propietateak dira. Baina zenbaki arruntekin betetzen direla ziurtatu nahi badugu, esan egin behar dugu hori egia dela onartuko dugula. Bostgarrenak dio zenbaki arrunt bati berdina den edozein gauza, benetan zenbaki arrunt bat dela. Honek ere ez dauka misterio handirik.

Azter ditzagun orain seigarrenetik aurrerakoak. Seigarrenak esaten digu existitzen dela zenbaki bat, 1-aren *hurrengoa* dena eta bakarra dena. Hori da hain zuzen ere guretzat 2 bezala ezaguna den zenbakia, hau da $s(1) = 2$ da gure ohiko sinbologian. Existitzen da, eta ez dago beste zenbaki arruntik 1-aren hurrengoa denik. Aldi berean (vi)-ak ziurtatzen digu 2-ren hurrengo bakar bat existitzen dela; guk $3 = s(2) = s(s(1))$ sinboloarekin ezagutzen duguna, alegia. Horrela segiz, "hurrengo" guztiak existitzen direnez, $4, 5, 6, ...$ eta zenbaki arrunt guztiak lortzen ditugu.

Ohartu "hurrengo" deitu diogun hori, benetan $+1$ gisa adieraz dezakegula. Izan ere, ohituago gaude horrela ulertzera. Hala ere kasu honetan $+1$ hori ez da "eragiketa" bezala pentsatu behar, formalki adierazteko modu gisa baizik. Notazioan "s" letra erabiltzearen arrazoia ingelesetik dator, *succesor* hitzetik.

Badauzkagu, beraz, soilik (i) eta (vi) axiomei esker gure zenbaki arrunt guztiak. Orduan, zertarako hurrengo hiru axiomak? Bada, zenbaki arrunten multzoaren propietate garrantzitsuak direlako, ezin direlako lehen bietatik ondorioztatu, eta beharrezkoak direlako gerora guretzat ohikoak diren zenbaki arrunten propietateak frogatu ahal izateko.

Adibidez, demagun (vii) axioma ez daukagula. Axioma hori ez bagenu, ez genuke jakingo ondorioztatzen ondoko propietatea

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m.$$

Eta jakina, horren ondorio diren propietateak ere ez, adibidez $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$ $n + k = m + k \Rightarrow n = m$.

Zortzigarrenak ziurtatzen du "lehenengoa" existitzea. Hau da, zenbaki arruntak nolabait ordenatuta daude, eta 1-a ez denez inoren hurrengoa, bera da zerrendako lehena. Bukatzeko, azken enuntziatuak dio 1-a barne duen eta bere baitan dagoen zenbaki bakoitzaren hurrengoa barruan daukan multzoa benetan zenbaki arrunt guztien multzo osoa dela. Hau da, ez dago multzo txikiagorik propietate horiek betetzen dituena $\mathbb{N}$-ren barruan $\mathbb{N}$ osoa izan gabe.

1.6.2 Indukzio matematikoaren printzipioa

Behin zenbaki arruntak izanik, indukzio matematikoaren printzipioa aurkez dezakegu. Printzipio hau baliagarria da zenbaki arrunten menpeko enuntziatuak zenbaki arrunt guztietarako betetzen direla frogatzeko. Zehatzago esanda, zenbaki arrunt jakin batetik aurrera betetzen direla frogatzeko. Alegia, demagun $P(n)$ enuntziatu irekia dugula. Orduan, indukzioaren bidez gai izango gara

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

gisako enuntziatuak frogatzeko. Honela dio printzipioak formalki:

Teorema 1.6.3. *Izan bedi $n_0 \in \mathbb{N}$ eta demagun $P(n)$ enuntziatua dugula $n \geq n_0$ bakoitzerako. Baldin eta ondoko baldintzak betetzen badira:*

(i) $P(n_0)$ egia da,

(ii) $P(k)$ egia bada $P(k+1)$ ere egia da $k \geq n_0$ guztietarako.

Orduan $P(n)$ egia da $n \geq n_0$ guztietarako.

Froga. Frogapena absurdura eramanez egingo dugu. Demagun (i) eta (ii) egia direla eta ondorioa, hau da, "$P(n)$ egia da $n \geq n_0$" guztietarako ez dela egia. Enuntziatu horren ukapena da existitzen dela $k \geq n_0$ bat zeinentzat $P(k)$ gezurra den. Orain, $k = n_0$ bada, (i) egia izatearekin kontraesana lortzen dugu. Aldiz, $k > n_0$ bada, orduan existitzen da k' zenbaki arrunta zeinentzat k bere hurrengoa den. Hau da $k' + 1 = k$, edo beste era batera adierazita $k' = k - 1$. Bigarren enuntziatuarekin kontraesanean ez egoteko, $P(k') = P(k-1)$ ezin da egia izan. Bestela $P(k)$ ere egia litzatekeelako (ii)-ren arabera. Orain hasierako arrazoiketa k'-ri aplika diezaiokegu. Berriz, $k' = n_0$ bada badaukagu kontraesana. Bestela, bere aurrekoarentzako ere gezurra izan behar du enuntziatuak. Nola zenbaki arruntak lehen aipatu bezala ordenatuta dauden, eta bakoitzak aurreko bakarra daukan, momenturen batean n_0-ra iritsiko gara derrigorrez, eta nahi genuen kontraesana lortuko dugu. $\square$

Adibidea 1.6.4. Froga dezagun ondoko berdintza indukzioa erabiliz:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indukzioaren printzipioaren arabera aski da $P(1)$ egia dela egiaztatu eta $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ enuntziatua egia dela frogatzea. Ikus ditzagun biak.

Batetik, idatz dezagun zer den $P(1)$. Goiko enuntziatuan n-ren lekuan 1 balego, ezkerreko aldean batugai bakarra agertuko litzaiguke. Izan ere, 1-etik n-rako zenbakiak batu behar ditugu, baina $n = 1$ denez ez dago beste batugairik.

Berdintzaren eskumako aldean 1 ordezkatuz aldiz $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ geratzen zaigu. Alegia, ezkerraldean 1 eta eskuman 1 geratzen zaizkigula, eta beraz, $P(1) : 1 = 1$ enuntziatua baino ez da, bistan denez egia dena.

Froga dezagun orain edozein zenbaki arrunt k izanik $P(k)$ egia izateak $P(k+1)$ egia dela inplikatzen duela. Gure hipotesia da $P(k)$ egia dela. Beraz, egia da

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

betetzen dela. Orain, ikusi nahi dugu zer gertatzen den k-raino beharrean $k+1$-eraino egiten dugunean batura. Gustatuko litzaiguke formula betetzea $k+1$ kasuan ere, hau da, frogatu nahi duguna honakoa da:

$$1 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ohartu kasu honetan n-ren lekuan $k+1$ idaztea besterik ez dugula egin. Saia gaitezen $P(k)$ egia dela suposatuz goiko berdintza horretara iristen.

Berdintzaren ezkerreko aldetik abiatuz,

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Eta beraz, ondorioztatu dugu nahi genuen berdintza. Ohartu lehen berdintzan $P(k)$ egia dela erabili dugula, $1+\cdots+k$ ezkerreko atalarekin ordezkatuz eta gero soberan geneukan $k+1$ hori gehituz. Hurrengo pausuetan izendatzaile komuna jarri eta faktore komuna ateraz adierazpena sinplifikatzea besterik ez dugu egin. Horrela frogatuta geratu da lehen n zenbaki arrunten baturarako formula.

Indukzio sendoaren printzipioa

Batzuetan indukzio matematikoaren bigarren pausuan $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ frogatzea zaila edo ezinezkoa gerta daiteke. Horretarako, indukzioaren bigarren pausoa honela molda daiteke, eta honi indukzio sendoaren printzipio esaten zaio:

$(ii)'$ $P(n)$ egia bada $n \in \{n_0, \ldots, k\}$ guztietarako, orduan $P(k+1)$ egia da.

Ariketa 1.vi. Frogatu indukzio sendoaren printzipioa aurreko frogapenaren antzerako estrategia jarraituz.

Adibidea 1.6.5. Ikus dezagun bigarren forma hau erabili beharreko adibide bat. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki arrunten segida bat, errekurtsiboki definituta dagoena ondoko eran:

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}, \qquad n > 2,$$

eta hasierako balioak $a_1 = 1$ eta $a_2 = 5$ izanik. Gisa honetako segida batean, segidako hurrengo elementuak kalkulatzeko aurreko guztiak kalkulatu beharko genituzke printzipioz. Beraz, adibidez a_{100} ezagutzeko 99 kalkulu egin beharko genituzke. Hala ere, saia gaitezke segidarentzako formula bat topatzen, segidako elementuen menpe baino n zenbaki arruntaren menpe egongo dena. Hau ez da beti posible izango, baina ikusiko dugunez, kasu honetan bai.

Froga dezagun indukzioa erabiliz $a_n = 2^n + (-1)^n$ dela. Kasu honetan saiatuko bagina a_k egia dela suposatuz a_{k+1} egia dela frogatzen, ez genuke lortuko. Izan ere, demagun $P(k)$ egia dela, hau da, $a_k = 2^k + (-1)^k$, orduan,

$$a_{k+1} = a_k + 2a_{k-1} = 2^k + (-1)^k + 2a_{k-1},$$

izango genuke, baina hemendik aurrera ez genuke zer egin jakingo, ez dakigulako a_{k-1}-i buruz ezer. Aldiz, n_0-tik k-rako denentzat egia dela suposatu badugu, a_{k-1}-entzako ere egia izango da enuntziatua, eta beraz hori ere ordezka genezake. Honela,

$$\begin{aligned} a_k = a_k + 2a_{k-1} &= 2^k + (-1)^k + 2a_{k-1} \\ &= 2^k + (-1)^k + 2(2^{k-1} + (-1)^{k-1}) \\ &= 2^k + (-1)^k + 2^k + 2(-1)^{k-1} \\ &= 2 \cdot 2^k + (-1)^{k-1}(-1+2) \\ &= 2^{k+1} + (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Eta honela frogatuta egongo litzateke $P(n_0), \ldots, P(k)$-k $P(k+1)$ inplikatzen dutela. Baina kontuz! Ezin dugu inoiz ahaztu oinarrizko kasuak ere konprobatzea! Izan ere, oinarrizko kasuak gezurrezkoak badira emaitza osoa gezurra izan daiteke. Kasu honetan, oinarrizko kasuak $n = 1$ eta $n = 2$ dira, eta konproba daiteke $P(1) = 2^1 + (-1)^1 = 1$ dugula eta $P(2) = 2^2 + (-1)^2 = 5$.

Ariketa 1.vii. Azaldu azken frogako berdintza katean une bakoitzean zer den erabili duguna eta eman a_1 eta a_2 desberdinak zeinentzako a_n-k ez duen formula betetzen.