8. Gaiko ariketak

1. Izan bedi $g \in \mathbb{K}[x]$ eta izan bedi $\deg g = n$. Frogatu edozein $f \in \mathbb{K}[x]$ hartuta, $\deg f \geq n$ bada,

$$f(x) = p_r(x)g(x)^r + p_{r-1}(x)g(x)^{r-1} + \cdots + p_1(x)g(x) + p_0(x)$$

eran idatz daitekeela, $\deg p_i < n$ izanik. (Laguntza: zatiketaren algoritmoa erabili eta, nahi izanez gero, indukzioa.)

Hartu $f(x) = x^7 + 1$ eta $g(x) = x^2 + 1$, eta idatzi f-ren garapena g-ren berreturak erabiliz.

2. Izan bitez $d, n \in \mathbb{N}$. Frogatu $x^d - 1 \mid x^n - 1$ dela baldin eta soilik baldin $d \mid n$ bada. *(Laguntza: $\Rightarrow$ inplikaziorako $n = qh + r$ bada, kontuan izan $x^n - 1 = (x^{qh} - 1)x^r + x^r - 1$ dela.)*

3. Kalkulatu $zkh(f, g)$ kasu hauetan:

(i) $f(x) = x^2 + x + 2$, $g(x) = x^3 + 2x + 1$;

(ii) $f(x) = x^{10} - 1$, $g(x) = x^6 - 1$;

(iii) $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Idatzi gero $zkh(f, g) = pf + qg$ eran, p eta q polinomio egokiak hartuta.

4. Aurkitu ondoko polinomioen erro arrazional guztiak: $x^n - 1, x^n + 1, 3x^3 + x - 5, x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

5. Izan bitez $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ eta $f \in \mathbb{K}[x]$. Frogatu $f(x)$ polinomioa $\mathbb{K}[x]$-n irreduziblea dela baldin eta soilik baldin $f(ax + b)$ irreduziblea bada $\mathbb{K}[x]$-n.

6. Izan bitez $f, g \in \mathbb{K}[x]$ bi polinomio, maila n baino txikiago edo berdina dutenak. Existitzen badira $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ n+1 balio ezberdin non $f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ den, frogatu $f = g$ dela.

7. Deskonposatu ondoko polinomioak faktore irreduzibletan $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$-ren gainean:

(i) $x^3 - 1$,

(ii) $x^4 + 1$,

(iii) $x^3 - 2x^2 - 2x + 4$,

(iv) $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

8. Aurkitu $f(x) = x^6 + 10x^3 - 12x + 5$ polinomioaren erro anizkoitz guztiak eta erabili informazio hori $f(x)$ irreduzibleen biderkadura gisa faktorizatzeko $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$ gorputzen gainean.

9. Deskonposatu batugai soiletako zatikien batura gisa ondoko zatikiak:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)^2} \text{ eta } \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$