6. Gaiko ariketak

1. Kalkulatu $d = zkh(a, b)$ eta idatzi $d = am + bn$ eran kasu hauetan:
(i) $a = 13$ eta $b = 34$; (ii) $a = 541$ eta $b = 689$; (iii) $a = 1265$ eta $b = 312$.

2. Frogatu $zkh(6n + 8, 4n + 5) = 1$ dela, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

3. Frogatu ondoko enuntziatuak:

(i) Edozein $n \in \mathbb{N}$-rako 2-k $n^2 - n$ zatitzen du.

(ii) Edozein $n \in \mathbb{N}$-rako 4-k ez du $n^2 + 2$ zatitzen.

4. Frogatu ondoko baieztapenak. Baldin $zkh(a, b) = 1$ bada

(i) baldin eta $d \mid b$, orduan $zkh(a, d) = 1$,

(ii) $zkh(ac, b) = zkh(c, b)$ da. Erabili hori $zkh(5000, 31768)$ kalkulatzeko.

5. Frogatu indukzioz:

(i) Edozein $n \in \mathbb{N}$-rako 4-k $5^n - 1$ zatitzen du,

(ii) Edozein $n \in \mathbb{N}$-rako 7-k $2^{3n} - 1$ zatitzen du,

(iii) Oro har, $a \in \mathbb{Z}$ edozein izanik, $a - 1$-ek $a^n - 1$ zatitzen du.

6. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$ zeroren ezberdinak. Izan bitez

$$S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = ax + by, x, y \in \mathbb{Z} \text{ izanik}\}$$

multzoa eta $d = zkh(a, b)$. Frogatu $S = d\mathbb{Z}$ dela.

7. Izan bitez $n, m \in \mathbb{Z}$ elkarrekiko lehenak. Frogatu $n \mid k$ eta $m \mid k$ bada, orduan $nm \mid k$. Hori erabiliz, frogatu $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = nm\mathbb{Z}$ dela.

8. (i) Frogatu $n \in \mathbb{Z}$ edozein izanik $zkh(n, n + 1) = 1$ dela.

(ii) Frogatu $n \in \mathbb{Z}$ bakoitia bada, orduan $zkh(n, n + 2) = 1$ dela.

(iii) Zer gertatzen da n bikoitia bada? Esan zein uste duzun dela $zkh(n, n+2)$ eta frogatu.

9. Izan bedi $p > 3$ zenbaki lehena. Frogatu $6n + 1$ edo $6n + 5$ erakoa dela, eta $p^2 + 2$ ez dela lehena.

CC BY NC SA

10. Baldin $zkh(a, b) = 1$ bada eta ab karratu perfektua bada, frogatu a eta b karratu perfektuak direla. *(Oharra: zenbaki oso bat, a, karratu perfektua dela diogu existitzen bada* $n \in \mathbb{Z}$ *non* $a = n^2$ *den.)*

11. Izan bedi a zenbaki osoa. Aztertu ondoko baieztapenak egia edo gezurra diren:

(i) $2 \mid a(a + 1)$ eta $6 \mid a(a + 1)(a + 2)$,

(ii) $2 \mid a(2a^2 + 7)$.

12. Aurkitu hiru zatitzaile (eta ez gehiago) dituzten zenbaki guztiak.
Aurkitu lau zatitzaile (eta ez gehiago) dituzten zenbaki guztiak.

13. Aurkitu ekuazio hauen soluzio diren $m, n \in \mathbb{N}$ guztiak:
(i) $m^4 = n^2 + 71$; (ii) $2^n + 1 = m^2$.

14. Bi zenbaki osoak eta positiboak, n eta m, zenbaki lagunak direla esaten da, baldin eta zenbaki horien batura, bakoitzaren zatitzaile positibo guztien batura bada. Frogatu ondoko bi zenbakien bikoteak lagunak direla: $\{220, 284\}$ eta $\{17296, 18416\}$