

Problemas de dualidad

1. Para los siguientes modelos lineales calcular el modelo dual asociado.

1.1.	$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$	1.2.	$\min z = x_1 + 3x_2 + x_3$
	sujeto a		sujeto a
	$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 1$		$4x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -7$
	$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7$		$2x_1 - 4x_2 \geq 12$
	$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$		$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \geq 5$
	$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 : \text{no rest.}$		$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

1.3.	$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3$	1.4.	$\max z = x_1 + x_2 + 5x_3$
	sujeto a		sujeto a
	$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$		$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -4$
	$-x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -8$		$-x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 2$
	$3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \leq 10$		$4x_1 - x_2 + x_3 = 6$
	$x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0, x_3 : \text{no rest.}$

1.5.	$\min z = 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$	1.6.	$\max z = x_1 + 4x_2$
	sujeto a		sujeto a
	$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq -6$		$2x_1 - 4x_2 \leq 14$
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$		$-x_1 + 8x_2 \geq -6$
	$5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \geq 10$		$4x_1 + 6x_2 \leq 10$
	$x_1, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \geq 0$		$x_1 + 9x_2 = 3$
			$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$

2. Para los siguientes modelos lineales, calcular el dual asociado y resolver gráficamente el modelo lineal y el dual.

2.1. $\min z = 4x_1 + 6x_2$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.2. $\max z = 4x_1 + 6x_2$

sujeto a

$$10x_1 + 12x_2 \leq 22$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.3. $\max z = -2x_1 + 6x_2$

sujeto a

$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.4. $\max z = -3x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$-4x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Resolver los siguientes modelos lineales con el algoritmo simplex dual.

3.1. $\max z = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10$$

$$6x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3.2. $\min z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 22$$

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 20$$

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3.3. $\max z = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 40$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 30$$

$$2x_1 + x_3 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3.4. $\max z = -6x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 4x_4$

sujeto a

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\begin{array}{ll}
3.5. \max z = -2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 & 3.6. \max z = -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \\
\text{sujeto a} & \text{sujeto a} \\
6x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 12 & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 48 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 12 & -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 8 \\
x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 14 & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
3.7. \max z = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 & 3.8. \max z = 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{sujeto a} & \text{sujeto a} \\
3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 36 & -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 14 & 2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 30 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 10 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3.9. \max z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \\
\text{sujeto a} \\
6x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 \geq 28 \\
3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 22 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}$$

4. Considerar el modelo lineal

$$\begin{array}{l}
\max z = 10x_1 + 6x_2 \\
\text{sujeto a} \\
x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
2x_1 + x_2 \leq 3 \\
2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
4x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

4.1 Calcular el modelo dual.

4.2 Resolver el modelo dual eligiendo el algoritmo más conveniente: el simplex primal o el simplex dual.

4.3 Obtener la solución óptima del modelo primal de la tabla óptima del modelo dual.

5. Considerar el modelo lineal

$$\min z = 30x_1 + 28x_2$$

sujeto a

$$4x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$6x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5.1 Calcular el modelo dual.

5.2 Resolver el modelo dual eligiendo el algoritmo más conveniente: el simplex primal o el simplex dual.

5.3 Obtener la solución óptima del modelo primal de la tabla óptima del modelo dual.

6. Considerar los siguientes modelos lineales y la tabla óptima. Estos modelos han sido resueltos con el algoritmo simplex primal. En el modelo 6.2 se ha añadido una variable artificial (ver tabla).

6.1

$$\max z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$15x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 90$$

$$15x_1 + 5x_2 + 15x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	$\frac{17}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{57}{2}$
a₂	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{3}{2}$
a₁	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{2}$

6.2

$$\max z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 12$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	
	0	3	9	2	0	M	24
a₅	0	6	16	4	1	-1	40
a₁	1	2	4	1	0	0	12

Para cada modelo contestar las siguientes preguntas:

- Obtener de la tabla la solución óptima del modelo.
- Dar el modelo dual y obtener de la tabla la solución óptima del modelo dual.
- Calcular los precios sombra.