## 2. Zorizko laginketa. Lagineko estatistikoen banaketak

### 1. ARIKETA

Irudikatu R software librea erabiliz, ondorengo banaketak jarraitzen dituzten zorizko aldagaien dentsitate funtzioak:

a) Batezbestekoa 40 eta bariantza 25 dituen banaketa normala.

b) 35 askatasun gradu dituen Pearson-en $\chi^2$ banaketa.

c) 15 askatasun gradu dituen Student-en *t* banaketa.

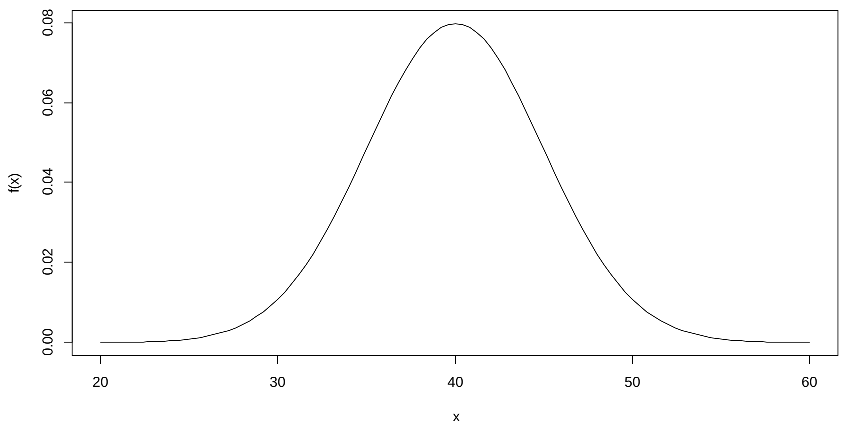
d) Izendatzailean 9 eta zenbakitzailean 23 askatasun gradu dituen Fisher-Snedecor-en *F* banaketa.

---

Ebazpena :

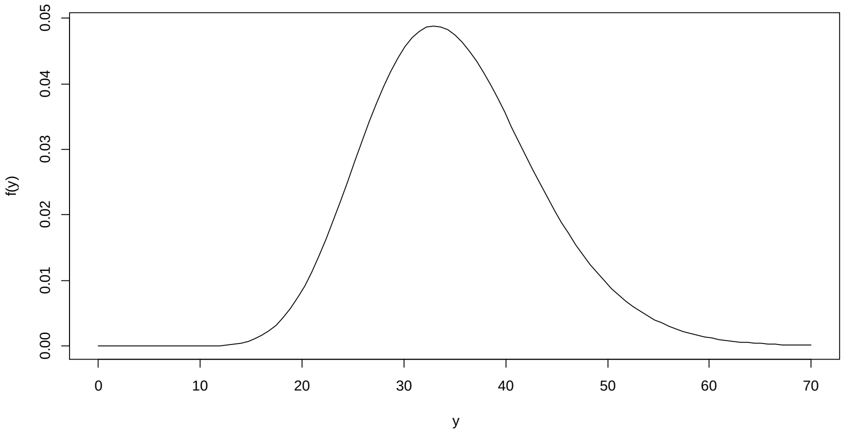
a)

```
>curve(dnorm(x,40,sqrt(25)),20,60,ylab="f(x)")
```



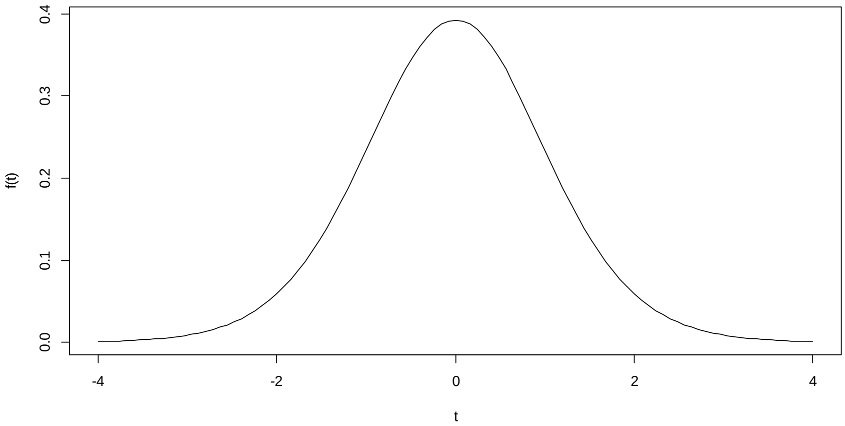

b)

```
>curve(dchisq(x,35),0,20,ylab="f(y)",xlab="y")
```



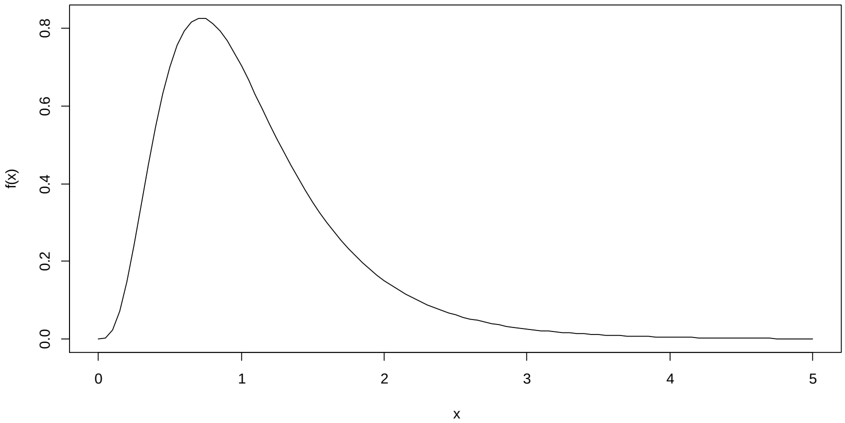
c)

```
>curve(dt(x,15),-4,4,ylab="f(t)",xlab="t")
```




d)

```
>curve(df(x,9,23),0,4,ylab="f(t)",xlab="t")
```




**2. ARIKETA**

Findegi batean erabiltzen den petrolioaren biskositateak banaketa normala jarraitzen du. Jakina da petrolioaren biskositatearen batezbestekoa 17 cP dela eta honen desbiderazio tipikoa 2 cP.

a) Egunero findegian petrolioaren 20 analisi egiten badira, zein da 20 analisi horien biskositatearen batezbestekoa 18 cP baino altuagoa izateko probabilitatea?

b) Beste findegi batean batezbesteko biskositate bera duen petrolioa erabiltzen dute baina honen desbiderazio tipikoa ezezaguna da. Horregatik, egindako 20 analisietako biskositatearen kuasidesbiderazio tipikoa kalkulatu dute 2.14 cP-ekoa izanik. Zein da kasu honetan laginaren batezbestekoa 18 cP baino altuagoa izateko probabilitatea?

Ebazpena :

a)

Zorizko aldagaia definituko da.

*X*: “Findegi batean erabiltzen den petrolioaren biskositatea”. Zorizko aldagai honek banaketa normala jarraitzen du.

$X \sim N(\mu, \sigma)$ non $\mu = 17\text{cP}$ eta $\sigma = 2\text{cP}$ diren.

20 analisi egin dira, hau da, laginaren tamaina, $n = 20$ da. Beraz, laginaren batezbestekoak, $\bar{X}$ , jarraituko lukeen banaketa honakoa da:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(17, 0.4472)$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P(\bar{X} > 18) = 1 - P(\bar{X} \leq 18)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
1-pnorm(18,17,0.4472)
[1] 0.0127
```

Hau da, findegiko petrolioaren 20 analisien biskositatearen batezbestekoa 18 cP baino altuagoa izateko probabilitatea 0.0127 da.

b)

Zorizko aldagai berria definituko da.

*X*: “Beste findegi batean erabiltzen den petrolioaren biskositatea”. Zorizko aldagai honek banaketa normala jarraitzen du.

$X \sim N(\mu, \sigma)$ non $\mu = 17\text{cP}$ eta $\sigma$ ezezaguna diren.

20 analisi egin dira, hau da, laginaren tamaina, $n = 20$ da. Beraz, laginaren batezbestekoa, $\bar{X}$ , kontuan hartzen duen aldagaiaren banaketa honakoa da:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} = t_{19}$$

Atal honetan eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P\left(\bar{X}>18\right)=1-P\left(\bar{X}\leq 18\right)=1-P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\leq\frac{18-17}{2.14/\sqrt{20}}\right)=1-P\left(T\leq 2.0898\right)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
1-pt(2.0989,19)
[1] 0.0252
```

Hau da, beste findegiko petrolioaren 20 analisien biskositatearen batezbestekoa 18 cP baino altuagoa izateko probabilitatea 0.0252 da.

## 3. ARIKETA

Laborategi batean bateria mota berriztagarriak egiteko material berri bat ekoizten ari dira. Material berri hori aztertzerakoan, karga/deskarga galbanostatiko deituriko proba oso garrantzitsua da. Bertan, materiala korronte konstante baten menpe tentsio jakin bateraino iristeko karga eta deskarga denborak neurtzen dira. Demagun, 2 ampereko korrontea aplikatuz 1 V-ko tentsioa lortu arteko karga denborak (minututan) banaketa normala jarraitzen duela, bariantza 53.5 min$^2$-koa izanik.

a) Material berri hori erabiliz, aurretik deskribatutako proba galbanostatikoan 27 neurketa egin badira, zein da lagin horren bariantza 50 minutu baino baxuagoa izateko probabilitatea?

b) Materiala berria ekoizteko prozesu bizkorrago bat garatu egin dute eta lortutako material berri hauek ere karga/deskarga galbanostatiko probaren bidez aztertu dira. Bizkorrago ekoiztutako material hauetarako 2 ampereko korrontea aplikatuz 1 V-ko tentsioa lortu arteko karga denborak ere banaketa normala jarraitzen du bariantza 54.4 min$^2$-koa izanik. Material honen proba galbanostatikoko 30 neurketa egiten badira, zein da aurreko ataleko laginaren bariantza lagin berri honen bariantza baina handiagoa izateko probabilitatea?

---

Ebazpena :

a)

Zorizko aldagaia definituko da.

*X*: “Material berria erabiliz 2 ampereko korrontea aplikatuz 1 V-ko tentsioa lortu arteko karga denbora”. Zorizko aldagai honek banaketa normala jarraitzen du.

$X \sim N(\mu,\sigma)$ non $\sigma^2 = 53.5 \text{ min}^2$ eta $\mu$ ezezaguna diren.

27 neurketa egin dira, hau da, laginaren tamaina, $n = 27$ da. Beraz, laginaren bariantza, $s^2$, kontuan hartzen duen aldagaiaren banaketa honakoa da:

$$Y = \frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{26}$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P\left(s^2 < 50\right) = P\left(s^2 \le 50\right) = P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} \le \frac{27 \cdot 50}{53.5}\right) = P\left(Y \le 25.2336\right)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
pchisq(25.2336,26)
[1] 0.4942
```

Hau da, material berriari egindako 27 neurketetan 2 ampereko korrontea aplikatuz 1 V-ko tentsioa lortu arteko karga denboraren bariantza 50 minutu baino baxuagoa izateko probabilitatea 0.4942 da.

b)

Zorizko aldagai berria definituko da.

*Y*: “Bizkorrago ekoiztutako material berria erabiliz 2 ampereko korrontea aplikatuz 1 V-ko tentsioa lortu arteko karga denbora”. Zorizko aldagai honek banaketa normala jarraitzen du.

$Y \sim N(\mu, \sigma)$ non $\sigma^2 = 54.4 \text{ min}^2$ eta $\mu$ ezezaguna diren.

Kasu honetan 30 neurketa egin dira, hau da, bigarren lagin honen tamaina, $m = 30$ da Bestalde, bi laginen bariantzak, $s_1^2$ eta $s_2^2$, kontuan hartzen duen aldagaiaren banaketa honakoa da:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\dfrac{ns_1^2}{(n-1)\sigma_1^2}}{\dfrac{ms_2^2}{(m-1)\sigma_2^2}} \sim F_{n-1;m-1} = F_{26;29}$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P\left(s_1^2 > s_2^2\right) = P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} > 1\right) = P\left(\frac{\dfrac{ns_1^2}{(n-1)\sigma_1^2}}{\dfrac{ms_2^2}{(m-1)\sigma_2^2}} > \frac{\dfrac{27}{26 \cdot 53.5}}{\dfrac{30}{29 \cdot 54.4}}\right) = 1 - P\left(F \le 1.0207\right)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
1-pf(1.0207,26,29)
[1] 0.4760
```

Hau da, material berriari egindako 27 neurketen 2 ampereko korrontea aplikatuz 1 V-ko tentsioa lortu arteko karga denboraren bariantza prozesu bizkorragoa erabiliz egindako material berriaren 30 neurketen bariantza baina altuagoa izateko probabilitatea 0.4760 da.

## 4. ARIKETA

Enpresa batean erreaktore batzuen kalitate kontrola burutzen ari dira. 316 motako altzairuz egindako erreaktoreak jasan dezaketen presioak banaketa normala jarraitzen duela jakina da honen batezbestekoa 150 bar-ekoa izanik. Bestalde 304 motako altzairuz egindako erreaktoreak jasan dezaketen presioa 147 bar batezbestekoa duen banaketa normala jarraitzen dute.

a) 316 motako altzairuz egindako 40 erreaktore hartu dira eta jasan dezaketen presioaren kuasibariantza 32 bar$^2$ dela erregistratu da. Beste alde batetik 304 motako altzairuz egindako 35 erreaktore ikuskatu dira eta jasan dezaketen presioaren kuasibariantza 24 bar$^2$-koa dela ikusi da. Zein da 316 altzairuz egindako 40 erreaktore horiek jasan dezaketen presioaren batezbestekoa 304 motako altzairuz egindako 35 erreaktoreen batezbestekoa baina handiagoa izateko probabilitatea? Kontsideratu populazioen bariantzak berdinak direla.

b) Aurreko ataleko probabilitate berdina kalkulatu baina populazioen bariantzak ezberdinak direla kontsideratuz.

---

Ebazpena :

a)

Zorizko aldagaiak definituko dira.

$X_1$: “316 motako altzairuz egindako erreaktoreak jasan dezaketen presioa”.

$X_2$: “304 motako altzairuz egindako erreaktoreak jasan dezaketen presioa”.

Zorizko aldagai horiek banaketa normalak jarraitzen dituzte.

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ eta $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ non $\mu_1 = 150$ bar eta $\mu_2 = 145$ bar diren.

Kasu honetan laginen batezbestekoen diferentziekin lan egin behar da eta populazioen bariantzak ezezagunak izanik berdinak direla kontsideratu behar da. Beraz, lagineko batezbestekoen diferentzia kontuan hartzen duen aldagaiaren banaketa honakoa da:

$$T=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t_{n+m-2}=t_{73}$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P\left(\bar{X}_1>\bar{X}_2\right)=P\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2>0\right)=P\left(\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}>-\frac{(150-147)}{\sqrt{\frac{39\cdot 32+34\cdot 24}{73}}\sqrt{\frac{1}{40}+\frac{1}{35}}}\right)=$$

$$=P(T>-2.4376)=P(T\le 2.4376)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
pt(2.4376,73)
[1] 0.9914
```

Hau da, 316 altzairuz egindako 40 erreaktoreak jasan dezaketen presioaren batezbestekoa 304 motako altzairuz egindako 35 erreaktoreen batezbestekoa baina handiagoa izateko probabilitatea 0.9914 da.

b)

Zorizko aldagaiak a) atalean definitutako berdinak dira eta banaketa berdinak jarraitzen dituzte.

Baina kasu honetan, populazioen bariantzak ezezagunak izanik ezberdinak direla kontsideratu behar da. Beraz, lagineko batezbestekoen diferentzia kontuan hartzen duen aldagaiaren banaketa honakoa da:

$$T=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}\sim t_\upsilon \text{ non } \upsilon=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n}\right)^2\Big/_{n+1}+\left(\frac{S_2^2}{m}\right)^2\Big/_{m+1}}-2$$

$$\upsilon=\frac{\left(\frac{32}{40}+\frac{24}{35}\right)^2}{\left(\frac{32}{40}\right)^2\Big/_{41}+\left(\frac{24}{35}\right)^2\Big/_{36}}-2=74.9889\approx 75 \text{ Beraz, } T=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}\sim t_{75}$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P\left(\bar{X}_1 > \bar{X}_2\right) = P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0\right) = P\left(\frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} > -\frac{\left(150 - 147\right)}{\sqrt{\frac{32}{40} + \frac{24}{35}}}\right) = P\left(T > -2.4612\right) =$$

$$P\left(T \leq 2.4612\right)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
pt(2.4612,75)
[1] 0.9914
```

Hau da, 316 altzairuz egindako 40 erreaktoreak jasan dezaketen presioaren batezbestekoa 304 motako altzairuz egindako 35 erreaktoreen batezbestekoa baina handiagoa izateko probabilitatea 0.9914 da. Aurreko ataleko probabilitate berbera.

## 5. ARIKETA

Murano irlan kokatuta dagoen Vetrom lantegian beirazko botilak ekoizten dituzte. Lantegiko lehenengo labea botila berdeak ekoizteko erabiltzen da eta hauen %1a akastuna dela jakina da. Gainera independentea den beste labe batean botila gardenak ekoizten dira eta hauen %1.4a akastunak dira.

a) Lehenengo labeak ekoizten dituen 150 botila berde hartu dira. Zein da lagin honetako botila berde akastunen proportzioa %0.8 baina txikiagoa izateko probabilitatea?

b) Bigarren labeak ekoiztutako 200 botila garden hartu dira. Zein da bigarren lagin honetako botila akastunen proportzioa aurreko atalean hartutako botila berdeen laginaren proportzioa baina handiagoa izateko probabilitatea?

---

Ebazpena :

a)

Zorizko aldagaia definituko da.

$X_1$: “Lehenengo labeak egindako botila berde akastun kopurua”.

Zorizko aldagai honek banaketa binomiala jarraitzen du.

$X_1 \sim Bin(n_1, p_1)$ non $p_1 = 0.01$ den.

Atal honetan lagineko proportzioari buruz galdetzen dute eta $n_1 = 150 > 100$ izanik, laginaren proportzioak, $\hat{p}_1$ jarraituko lukeen banaketa honakoa da.

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1}}\right) = N(0.01, 0.0081)$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P(\hat{p}_1 < 0.008) = P(\hat{p}_1 \leq 0.008)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
pnorm(0.008,0.01,0.0081)
[1] 0.4025
```

Hau da, 150 botila berdeko laginean, botila akastunen proportzioa %0.8 baina txikiagoa izateko probabilitatea 0.4025 da.

b)

Lehenik eta behin zorizko aldagai berri bat definituko da.

$X_2$: “Bigarren labeak egindako botila garden akastun kopurua”.

Zorizko aldagai honek banaketa binomiala jarraitzen du.

$X_2 \sim Bin(n_2, p_2)$ non $p_2 = 0.014$ den.

Kasu honetan ere $n_2 = 200 > 100$ izanik, laginaren proportzioak, $\hat{p}_2$ jarraituko lukeen banaketa honakoa da.

$$\hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \sqrt{\frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}\right) = N(0.01, 0.0083)$$

Atal honetan laginetako proportzioen banaketari buruz galdetzen dute. Bai $\hat{p}_1$ eta $\hat{p}_2$ banaketa normalak jarraitzen dituztenez, hauen arteko diferentziak ere ondorengo banaketa normala jarraituko luke.

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}\right) = N(-0.004, 0.0116)$$

Eskatutako probabilitatea ondorengoa da:

$$P(\hat{p}_1 < \hat{p}_2) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq 0)$$

Probabilitate hori kalkulatzeko erabili behar den R-ko sententzia:

```
pnorm(0,-0.004,0.0116)
[1] 0.6349
```

Hau da, 200 botila gardeneko laginaren botila akastun proportzioa 150 botila berdeko laginaren botila akastun proportzioa baina handiagoa izateko probabilitatea 0.6349 da.