2. Gaiko ariketak

Multzoen ariketak

1. Deskribatu ondoko multzoak beraien nahikoa elementu zerrendatuz multzoa zein den argi geratzeko moduan:

(i) 15 eta 21-en artean dauden zenbaki oso positibo guztiak (beraiek biak barne).

(ii) Lehen 8 zenbaki oso karratuen multzoa.

(iii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 13\}$.

(iv) Bi karraturen batura diren lehen 10 zenbaki lehenen multzoa.

(v) Zenbaki positibo bat 7-ren bidez zatituz gero lor daitezkeen hondar posibleen multzoa.

(vi) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 4\}$.

(vii) Zenbaki oso guztien multzoa, zeintzuk 4-rekin zatituz gero hondarra 3 den.

(viii) Zenbaki erreal guztien multzoa zeinentzako $sinx = 0$ den.

(ix) Zenbaki erreal guztien multzoa zeinentzako $cosx = 0$ den.

(x) Elkarren ondoko bi zenbaki bakoitiren batura diren zenbaki oso guztien multzoa.

2. Deskribatu ondoko multzoak $\{x \in S \mid ...\}$ gisa.

(i) $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$.

(ii) $[0, 1]$ tarte itxiko zenbaki arrazionalak.

(iii) $[1, 2]$ tarte itxia.

(iv) $\{3, -1, 7, -5, 11, -9, \dots\}$.

(v) Zenbaki errealen multzoa zeinentzako jatorrirako distantzia 5 baino handiagoa den.

(vi) $\pi/2$-ren multiplo oso guztien multzoa.

3. Izan bedi $A = 5\mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists l \in \mathbb{Z},\, k = 5l\}$.

(i) Adierazi A multzoa $\{x \in S \mid ...\}$ gisara.

(ii) Frogatu $x, y \in A$ bada, orduan $x + y \in A$ eta $xy \in A$ dugula.

4. Izan bedi $P(x) : x < 5$ esaldi irekia eta $Q(x) : |x| \geq 1$ esaldi irekia. Adierazi ondoko multzoak tarteen notazioaren bidez.

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \wedge Q(x)\}$.

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \vee Q(x)\}$.

(iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid \neg P(x)\}$.

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid \neg Q(x)\}$.

(v) $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \wedge \neg Q(x)\}$.

(vi) $\{x \in \mathbb{R} \mid \neg P(x) \wedge Q(x)\}$.

(vii) $\{x \in \mathbb{R} \mid \neg P(x) \wedge \neg Q(x)\}$.

(viii) $\{x \in \mathbb{R} \mid \neg P(x) \vee \neg Q(x)\}$.

5. Izan bitez $A = 5\mathbb{Z}$ eta $B = 2\mathbb{Z}$. Kalkulatu ondoko multzoak:

(i) $A \cup B$

(ii) $A \cap B$

(iii) $A \setminus B$

(iv) $B \setminus A$

6. Izan bitez $A, B \subseteq X$ bi multzo. Frogatu ondoko berdintzak:

(i) $A \cap (A \cup B) = A$

(ii) $A \cup (A \cap B) = A$

(iii) $(A \cup B) \cap (X \setminus A) = B - A$

(iv) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(vi) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

7. Izan bitez A, B eta C hiru multzo.

(i) Frogatu $A \subseteq B \cap C \Rightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)$.

(ii) Enuntziatu bere kontrajarria.

(iii) Enuntziatu kontrako inplikazioa eta frogatu egia edo gezurra den.

8. Izan bitez $A, B \subseteq X$. Frogatu hauek guztiak baliokideak direla:

$$A \subseteq B, \; A \cap B = A, \; A \cup B = B, \quad B^c \subseteq A^c, \; A \cap B^c = \emptyset \text{ eta } B \cup A^c = X.$$

9. Izan bedi $A = \{a, b\}$ eta $\mathcal{P}(A)$ A-ren parteen multzoa. Erabaki egiazkoak edo gezurrezkoak diren adierazpen hauek:

(i) $a \in A$; (ii) $\{a\} \in A$; (iii) $\emptyset \in A$; (iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; (v) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

10. Kalkulatu $\mathcal{P}(X)$ kasu hauetan: (i) $X = \{1, 2\}$; (ii) $X = \emptyset$; (iii) $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

11. Izan bitez $A, B \subset X$.

(i) $A \subseteq B$ bada, frogatu $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ dela. Alderantzizkoa egia da?

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$: frogatu edo eman kontradibide bat.

(iii) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$: frogatu edo eman kontradibide bat.

12. Izan bitez $n, m \in \mathbb{N}$ eta $m\mathbb{Z}$ eta $n\mathbb{Z}$ m-ren eta n-ren multiploen multzoak hurrenez hurren. Frogatu ondoko baieztapena

$$m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \Longleftrightarrow n \mid m.$$

13. Jarraian ematen diren indizedun familietarako, kalkulatu eskatzen diren multzoak:

(i) $I = \mathbb{R}^2$; $p \in I$ bakoitzerako, $S_p = \{p\}$; aurkitu $\bigcup_{p \in I} S_p$.

(ii) $I = (0, \infty)$; $x \in I$ bakoitzerako, $C_x = [0, x]$ tartea; aurkitu $\bigcup_{x \in I} C_x$ eta $\bigcap_{x \in I} C_x$.

(iii) $I = [1, 2]$; $x \in I$ bakoitzerako, $A_x = [x/2, 3x/2]$; aurkitu $\bigcup_{x \in I} A_x$ eta $\bigcap_{x \in I} A_x$.

(iv) $I = \mathbb{N}$; $n \in I$ bakoitzerako, $C_n = (-n, n)$; aurkitu $\bigcup_{n \in I} C_n$ eta $\bigcap_{n \in I} C_n$.

Funtzioen ariketak

14. Izan bitez $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ eta $h(x) = \cos x$. Idatzi adierazpen hauek aurrekoen konposizio gisa:

(i) $2^{\cos x}$, (ii) $\cos^2 x$, (iii) $\cos 2^x$, (iv) $\cos(\cos^2 x)$, (v) $\cos^2(2^{\cos x})$, (vi) $2^{2\cos x}$, (vii) $2^{\cos^2 x}$.

15. Kalkulatu $f \circ g$ eta $g \circ f$ ondoko kasuetan:

- $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x) = x^2 + 1$ eta $g(x) = e^{2x}$.
- $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n) = 2n$ eta $g(n) = \begin{cases} n, & n \text{ bikoitia} , \\ 2n-1, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$
- $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ bikoitia} , \\ 2n, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$ eta $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ bikoitia} , \\ n+1, & n \text{ bakoitia}. \end{cases}$

16. Ondoko funtzioen irudia kalkulatu, baita ondoren ematen den X multzoaren f-ren bidezko irudia ere.

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n) = 2n + 1$, $X = 2\mathbb{Z}$ izanik.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x) = 3x + 1$, $X = [-1, 4]$.

(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ bikoitia} \\ n, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$, $X = 2\mathbb{Z}$.

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x) = \cos(x)$, $X = [0, \pi/2]$.

(v) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ non $f(x) = \frac{1}{x}$ eta $X = (0, 1]$.

(vi) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n, m) = nm$ eta $X = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

17. Izan bedi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n) = \begin{cases} n+2, & n \text{ bikoitia} \\ 2n, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$ eta izan bitez B_a eta B_i zenbaki bakoiti eta bikoitien multzoak hurrenez hurren.

(i) Frogatu $Imf = B_i$ dela.

(ii) Frogatu $f(B_i) = B_i$ dela.

(iii) Frogatu $f(B_a) = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : k = 4n + 2\}$ dela.

(iv) Frogatu $f(4\mathbb{Z}) = B_a$ dela.

18. Ondoko funtzioen kasuan zehaztu ematen diren koeremuko azpimultzoen aurreirudiak.

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 3n + 1$ eta $W_1 = 2\mathbb{Z}$, $W_2 = \{1, 5, 8\}$, $W_3 = \{4\}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$; $W_1 = \{4\}$, $W_2 = \{1, 5, 8\}$, $W_3 = (4, \infty)$, $W_4 = 2\mathbb{Z}$.

(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ bikoitia} \\ n-1, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$; $W_1 = 2\mathbb{Z}$, $W_2 = \{1\}$, $W_3 = B_a$ zenbaki bakoitien multzoa.

(iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n) = (n, n)$; $W_1 = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $W_2 = \mathbb{Z}^+ \times \{-1\}$.

19. Erabaki ondoko funtzioetako zein diren injektibo eta zein supraiektiboak:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$,

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$,

(iv) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$,

(v) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ non $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ den eta $f(x) = \frac{1}{x}$

(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1. \end{cases}$

(vii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n) = (n, n)$,

(viii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m, n) = m + n$,

(ix) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

20. Izan bedi $f : A \to B$ funtzioa. Ondorengo zein enuntziatu dira "f supraiektiboa (edo surjektiboa) da" enuntziatuaren baliokideak?

(i) $B \subseteq Imf$.

(ii) Baldin eta $a \in A$ bada, orduan $f(a) \in B$.

(iii) $W \in \mathcal{P}(B)$ eta $W \neq \emptyset$ bada, $f^{-1}(W) \neq \emptyset$.

(iv) $f^{-1}(B) = A$

21. Izan bedi $f : A \to B$ funtzioa. Ondorengo zein enuntziatu dira "f injektiboa da" enuntziatuaren baliokideak?

(i) $a, b \in A$ izanik, $a = b$ bada, orduan $f(a) = f(b)$.

(ii) $a, b \in A$ izanik, $f(a) = f(b)$ bada, orduan $a = b$.

(iii) $a, b \in A$ izanik, $a \neq b$ bada, orduan $f(a) \neq f(b)$.

(iv) $a, b \in A$ izanik, $f(a) \neq f(b)$ bada, orduan $a \neq b$.

22. Izan bitez $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x^2 + y$ eta $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $g(x) = (x, -2x)$.

(i) Kalkulatu $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ eta $g \circ f$, ondo definituta baldin badaude.

(ii) Aztertu f, g, $f \circ g$ eta $g \circ f$ funtzioen injektibotasuna eta surjektibotasuna.

23. Aurkitu funtzio bijektibo zehatzak ondoko eremu eta koeremuen artean:

(i) $[0,1]$ eta $[1,2]$,

(ii) $(-1,1)$ eta $\mathbb{R}$,

(iii) $[0,1]$ eta $[0,1)$,

(iv) $[-1,1]$ eta $\mathbb{R}$.

24. Erabaki ondoko funtzioetako zein diren alderanzgarriak, eta diren kasuetan aurkitu alderantzizkoa.

(i) $f : \{-1,0,1\} \to \{\pi, e, \sqrt{2}\}$ honela definituta $f(-1) = e$, $f(0) = e$ eta $f(1) = \sqrt{2}$.

(ii) $f : \{-1,0,1\} \to \{\pi, e, \sqrt{2}\}$ honela definituta $f(-1) = e$, $f(0) = \pi$ eta $f(1) = \sqrt{2}$.

(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(x) = 7x + 3$ den.

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $f(x) = 7x + 3$ den.

(v) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non $f(n) = 2n$ den.

(vi) $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ non $f(n) = 2n$ den.

(vii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \{0,1\}$ non $f(n) = \begin{cases} (\frac{n}{2}, 0), & n \text{ bikoitia} \\ (\frac{n-1}{2}, 1), & n \text{ bakoitia.} \end{cases}$

Erlazioen ariketak

25. Erabaki $\mathbb{Z}$-n definituriko ondoko erlazioak erreflexibo, simetriko, antisimetriko edo/eta trantsitiboak diren.

(i) $a\mathcal{R}b$, $a > b$ bada.

(ii) $a\mathcal{R}b$, $a = -b$ bada.

(iii) $a\mathcal{R}b$, $b = 5a$ bada.

(iv) $a\mathcal{R}b$, $a \leq b + 1$ bada.

26. Izan bedi $A = \{1, 2, 3\}$ eta defini dezagun A-ren gainean ondoko erlazioa: $a\mathcal{R}b$ baldin eta $a + b \neq 3$. Erabaki erlazio erreflexiboa, simetrikoa, antisimetrikoa edo/eta trantsitiboa den.

27. Izan bedi A multzoa eta $\mathcal{P}(A)$ A-ren parteen multzoa. Esan $\mathcal{P}(A)$ multzoaren gainean definitutako ondoko erlazioak erreflexiboa, simetrikoa, antisimetrikoa edo/eta trantsitiboak diren.

(i) $C\mathcal{R}D$ baldin eta $C \subsetneq D$.

(ii) $C\mathcal{R}D$ baldin eta $C \cap D = \emptyset$

(iii) $C\mathcal{R}D$ baldin eta $C \cap D \neq \emptyset$.

28. Erabaki ondoko erlazioak erreflexibo, simetriko edo trantsitiboak diren. Baliokidetasun erlazio direnen kasuan esan zein diren baliokidetasun klase ezberdinak.

(i) $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$-tik $\mathbb{R}$-rako funtzioen multzoan, $f\mathcal{R}g$ baldin eta $f(0) = g(0)$.

(ii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ multzoan $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ baldin eta $ad = bc$.

(iii) $A \times B$ multzoan $(a_1, b_1)\mathcal{R}(a_2, b_2)$ baldin eta $a_1 = a_2$.

(iv) Izan bedi A multzoa eta $f : A \to A$ funtzio bat. Orduan A multzoan ondoko erlazioa definitzen dugu: $a\mathcal{R}b$ baldin eta $f(a) = f(b)$.

(v) Zenbaki arrazionalen multzoan $r\mathcal{R}s$ baldin eta $r - s \in \mathbb{Z}$.

29. Izan bitez $f : X \to X$ funtzioa eta X-ren gainean definituriko ondoko erlazioa: $x\mathcal{R}y$ baldin eta $f(x) = y$ bada. Frogatu:

(i) $\mathcal{R}$ erreflexiboa dela baldin eta soilik baldin $f = 1_X$ bada.

(ii) $\mathcal{R}$ simetrikoa dela baldin eta soilik baldin $f^2 = 1_X$ bada.

(iii) $\mathcal{R}$ iragankorra (edo trantsitiboa) dela baldin eta soilik baldin $f^2 = f$ bada.

30. Espazioan, $\mathbb{R}^3$-n, ondoko erlazioa definitzen da puntuen artean $(a, b, c)\mathcal{R}(x, y, z)$ baldin eta $z = c$ bada. Frogatu baliokidetasun erlazioa dela eta deskribatu baliokidetasun klaseak geometrikoki.

31. Erabaki X-ren gaineko erlazio bitar hauek baliokidetasun-erlazioak diren edo ez. Izanez gero, deskribatu baliokidetasun-klaseak. Aurkitu erlazioaren ordezkari-sistema oso bat, hau da, $A \subset X$ azpimultzoa non X-ren edozein elementu A-ren elementu bakar batekin erlazionatuta dagoen.

(i) $X = \mathbb{Z}$ eta $x \sim y$ baldin $x - y$ bakoitia bada.

(ii) $X = \mathbb{R}$ eta $x \sim y$ baldin $x - y \in \mathbb{Z}$ bada.

(iii) $X = \mathbb{R}$ eta $x \sim y$ baldin $xy \leq 0$ bada.

(iv) $X = \mathbb{R}^*$ eta $x \sim y$ baldin $xy > 0$ bada.

32. Definitu $X = \{1, 2, 3\}$ multzoan hiru erlazio non erlazio bakoitzak erreflexibo, simetriko eta trantsitibo izateko propietateen artean bi betetzen dituen eta hirugarrena ez. Honek frogatzen du hiru propietateak independenteak direla.