

## 1. Gaiko ariketak

1. Izan bitez  $P$  eta  $Q$  bi enuntziatu.

- (i) Frogatu  $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow Q$  eta  $P \Rightarrow Q$  logikoki baliokideak direla.
- (ii) Frogatu  $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$  eta  $P \Rightarrow Q$  logikoki baliokideak direla.

2. Izan bitez  $m$  eta  $n$  zenbaki osoak.

- (i) Frogatu ondoko enuntziatua: Baldin eta  $n$  eta  $m$  bikoitiak badira,  $n + m$  bikoitia da.
- (ii) Enuntziatu bere kontrajarria.
- (iii) Erabaki egia edo gezurra den kontrako inplikazioa, eta egia bada frogatu.

3. Frogatu ondoko baieztapenak:

- (i) Izan bedi  $n \in \mathbb{N}$ , orduan  $n^3$  bikoitia da baldin eta soilik baldin  $n$  bikoitia bada.
- (ii) Baldin eta  $n \in \mathbb{N}$  ez bada 3-ren multiploa, orduan  $n^2 - 1$  3-ren multiploa da.
- (iii) Ez da existitzen  $n \in \mathbb{N}$  non  $2n < n^2 < 3n$  den.
- (iv) Izan bitez  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Orduan  $x + y$  bakoitia bada,  $x$  eta  $y$  bata bikoitia eta bestea bakoitia dira derrigorrez.
- (v) Edozein zenbaki karratu derrigorrez edo 4-ren multiploa da edo  $4k + 1$  itxurakoa.
- (vi) Izan bitez  $m, n, p \in \mathbb{Z}$ . Baldin eta  $m + p$  eta  $p + n$  bikoitiak badira, orduan  $m + n$  bikoitia da.

4. Frogatu ondoko baieztapenak indukzioa erabiliz:

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
- (iv) *Bernoulli-ren desberdintza*:  $1 + nh \leq (1 + h)^n$  da,  $n \in \mathbb{N}$  eta  $h > -1$  izanik.
- (v)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .
- (vi)  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ .

5. Esan ondokoak egia edo gezurra diren. Frogatu egia diren kasuetan eta eman kontradibide bat gezurra direneko kasuetan:

- (i) Izan bedi  $n \in \mathbb{N}$  orduan  $5 \mid n^5 - n$ .
- (ii) Izan bitez  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Baldin eta biak bikoitiak ala biak bakoitiak badira, orduan  $xy$  eta  $(x + y)^2$  ere biak bakoiti ala biak bikoitiak dira.
- (iii) Baldin  $a, b \in \mathbb{Q}$  ezberdinak badira, orduan  $(a - 1)(b - 1) \neq 1$  da.
- (iv) Baldin eta  $p$  zenbaki lehena bada, orduan  $p + 13$  ez da lehena.
- (v)  $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$ .
- (vi) Baldin eta  $n = k^3 - k$  bada  $k \in \mathbb{N}$  baterako, orduan  $n$  6-ren multiploa da.