Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Eraikinen fisika: Bero- eta masa-transferentzia itxituratan

1. GAIKO ARIKETA

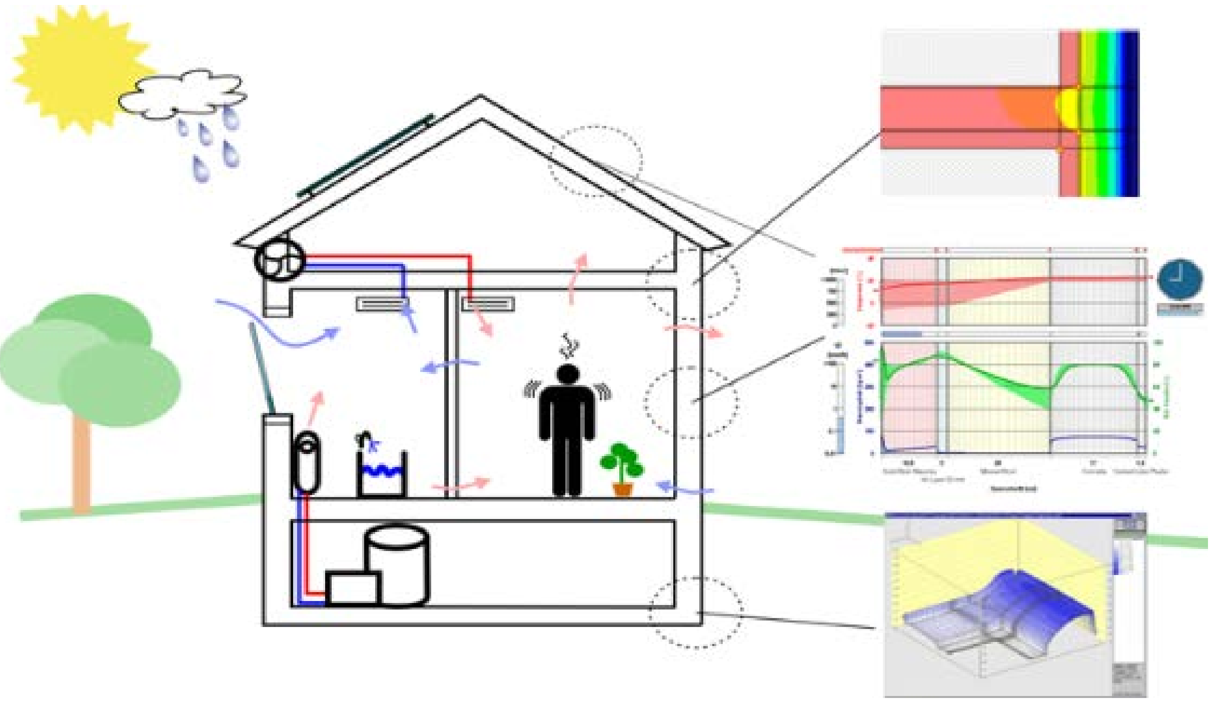


Figura: Fraunhofer Institute for Building Physics IBP
https://wufi.de/en/wp-content/uploads/sites/11/2014/04/800x321_WUFI-Plus-Schaubild.png

- Iñaki Gómez Arriaran
- Moises Odriozola Maritorena
- Koldobika Martín Escudero
- Estibaliz Pérez Iribarren
- Iker González Pino
- Naiara Romero Antón

ikasTHERM

ACTIVE LEARNING IN THERMAL ENGINEERING

1. GAIKO ARIKETA

Geruza bakar bateko horma bat kontsidera bedi, horma horrek hurrengo ezaugarri termikoak ditu:

- Konduktibitate termikoa, $k = 6$ W/(m·K)
- Dentsitatea, $\rho = 2500$ kg/m^3
- Bero espezifikoa, $c_p = 1000$ J/(kg·K)
- Lodiera, $L = 0{,}3$ m

Hormaren kanpo eta barne-gainazaletan tenperaturak honako hauek dira:

- Barneko gainazaleko tenperatura, $T_o = 20$ ºC
- Kanpoko gainazaleko tenperatura, $T_L = 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi / 24 \cdot t)$, t ordutan.

Transferentzia-funtzioen metodoa erabiliz, hormaren barne-gainazaleko bero-fluxu dentsitatea kalkulatzeko eskatzen da hurrengo parametroak kontutan izanik:

- Denbora-jauzia, $\Delta t = 1$ h
- Denbora-tartea: Astebete

EBAZPENA:

Transferentzia-funtzioen metodoa geruza anitzeko problema baten kasuan aplikatzerako orduan, badakigu hurrengo betetzen dela:

$$\begin{bmatrix} T_o(s) \\ q_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_L(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix}$$

Geruza bakar bat dugun kasuan ordea:

$$\begin{bmatrix} T_o(s) \\ q_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_L(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix}$$

Jakinik,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosh\left(L \cdot \sqrt{R \cdot C \cdot s}\right) & \sqrt{\dfrac{R}{C \cdot s}}\, sinh\left(L \cdot \sqrt{R \cdot C \cdot s}\right) \\ \dfrac{sinh\left(L \cdot \sqrt{R \cdot C \cdot s}\right)}{\sqrt{\dfrac{R}{C \cdot s}}} & cosh\left(L \cdot \sqrt{R \cdot C \cdot s}\right) \end{bmatrix}$$

non $R = \frac{1}{k}$ eta $C = \rho \cdot c_p$

ISSN 2255-2316

Kasu honetan, hormaren barne-gainazalean bero-fluxuaren dentsitatea kalkulatzeko eskatzen digute, beraz ekuazio matriziala modu honetan jartzea komeni zaigu:

$$\begin{bmatrix} q_o(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{1}{B} \\ \frac{1}{B} & -\frac{A}{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_o(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix}$$

T_o eta T_L tenperaturak laginketa-maiztasun jakin batean oinarrituta erregistratzen dira, balioen artean denbora-jauzi bat dago (adibidez, ordubete, datu meteorologiko estatistikoen kasuan bezala). Beraz, egokiagoa da Z eraldatua erabiltzea Laplace transformatuaren ordez.

$$\begin{bmatrix} q_o(z) \\ q_L(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{1}{B} \\ \frac{1}{B} & -\frac{A}{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_o(z) \\ T_L(z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_o(z) \\ q_L(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_o(z) \\ T_L(z) \end{bmatrix}$$

ISSN 2255-2316

Suposatuz, transferentzia-funtzio bakoitza polinomioez osatutako zatiki bezala idatz dezakegula:

$$G_{11} = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{B'(z)}{D(z)}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{B(z)} = \frac{1}{D(z)}$$

$$G_{22} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A'(z)}{D(z)}$$

$$A'(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \cdots + a_m \cdot z^{-m}$$
$$B'(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \cdots + b_n \cdot z^{-i}$$
$$D(z) = d_0 + d_1 \cdot z^{-1} + d_2 \cdot z^{-2} + \cdots + d_k \cdot z^{-k}$$

ISSN 2255-2316

A'(z), *B'(z)* eta *D(z)* polinomioak izanik, erreza alderantzizko transformatua lortzea, eta beraz, ekuazio matriziala ebatz dezakegu,

$$q_L(t)\cdot d_0 + q_L(t-\Delta t)\cdot d_1 + q_L(t-2\cdot\Delta t)\cdot d_2 + \cdots + q_L(t-k\cdot\Delta t)\cdot d_k =$$
$$= T_L(t)\cdot a_0 + T_L(t-\Delta t)\cdot a_1 + T_L(t-2\cdot\Delta t)\cdot a_2 + \cdots + +T_L(t-m\cdot\Delta t)\cdot a_m$$

$$\begin{aligned} q_L(t) \\ = \{&T_L(t)\cdot a_0 + T_L(t-\Delta t)\cdot a_1 + T_L(t-2\cdot\Delta t)\cdot a_2 + \cdots + +T_L(t-m\cdot\Delta t)\cdot a_m \\ &- [q_L(t-\Delta t)\cdot d_1 + q_L(t-2\cdot\Delta t)\cdot d_2 + \cdots + q_L(t-k\cdot\Delta t)\cdot d_k]\}\cdot\frac{1}{d_0}\end{aligned}$$

Beraz, aurreko adierazpena kontutan izanik, aurreko denbora-jauzietako *m* tenperaturak eta *k* bero-fluxu dentsitateak erabiliz, *t* aldiunean bero-fluxuaren dentsitatea kalkulatzen da. Emaitzaren zehaztasuna, erabilitako koefiziente kopuruaren menpekoa da, baina orokorrean nahikoa izaten da 10 termino erabiltzea kasu gehienetan.

ISSN 2255-2316

E(t) sarrera seinalea, $G_{ij}(s)$ transferentzia-funtzio bati aplikatzen bazaio, *R(s)* erantzuna jasotzen da. Mitalas-ek malda seinalea proposatzen du, *E(t)* = *t*, sarrera seinale bezala hartzeko:

$$G_{ij}(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \rightarrow R(s) = G_{ij}(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2}$$

Adibidez, $G_{22}(s)$-ren kasuan,

$$R_1(s) = \frac{A(s)}{B(s) \cdot s^2} = \frac{C_0}{s^2} + \frac{C_1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{s + \beta_n}$$

β_n, *B(s)* = *0*-ren erroak dira, C_0, C_1 eta e_n konstanteak izanik. *A'(s)*-ren *Z* transformatua hurrengoa da,

$$A'(z) = \frac{D_{G_{22}}(z)}{E(z)} \cdot R_1(z) = \frac{z \cdot \left(1 - z^{-1}\right)^2}{\Delta t} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right] \cdot R_1[z]$$

$$R_1(z) = \frac{C_0 \cdot \Delta t}{z \cdot (1 - z^{-1})^2} + \frac{C_1}{1 - z^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}}$$

Transferentzia-funtzioen *a*, *b* eta *d* koefizienteak kalkulatzen dira, izendatzailetik hasita. Hurrengoa da $R_1(z)$ eta $G_{22}(z)$-ren izendatzailea:

$$D_{R_1}(z) = z \cdot \left(1 - z^{-1}\right)^2 \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right]$$

$$D_{G_{22}}(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right]$$

Orduan,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right] = d_0 + d_1 \cdot z^{-1} + d_2 \cdot z^{-2} + \cdots + d_k \cdot z^{-k}$$

Kalkula ditzagun beraz lehenengo erroak *d* koefizienteen balioak lortzeko $n = 10$-entzako, ikus Taula 1.

$$\beta_n = -\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \alpha}{L^2}$$

non α materialaren difusibitate termikoa den.

Taula 1. Transferentzia-funtzioen koefizienteak kalkulatzeko erroak.

n	βn
1	-0,26
2	-1,05
3	-2,37
4	-4,21
5	-6,58
6	-9,47
7	-12,90
8	-16,84
9	-21,32
10	-26,32

ISSN 2255-2316

Kalkula ditzagun *d* izendatzaileari dagozkion 10 koefizienteak 10 erroentzat, ikus Taula 2.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right] = d_0 + d_1 \cdot z^{-1} + d_2 \cdot z^{-2} + \cdots + d_k \cdot z^{-k}$$

Taula 2. Izendatzaileko *d* koefizienteak.

n	d
1	1,00
2	-1,23
3	0,393
4	-0,0312
5	4,17E-04
6	-5,50E-07
7	4,11E-11
8	0
9	0
10	0

ISSN 2255-2316

Orain, *A'(z)* eta *B'(z)* zenbakitzaileen koefizienteak kalkulatuko ditugu, *A'(z)* zenbakitzaileenekin hasita. Gogora dezagun,

$$A'(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \cdots + a_m \cdot z^{-m}$$

$$A'(z) = \frac{D_{G_{22}}(z)}{E(z)} \cdot R_1(z) = \frac{z \cdot \left(1 - z^{-1}\right)^2}{\Delta t} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right] \cdot R_1[z]$$

Gorriz azaltzen den terminoa kalkulatu dugu jada, ikus Taula 2; beraz, R_1 *(z)* kalkulatzea besterik ez da falta. Horretarako, lehenik C_0 eta C_1 kalkulatuko ditugu. *A'(z)* zenbakitzaileari dagozkion C_0 eta C_1 koefizienteak hemen ditugu:

$$R_1(z) = \frac{C_0 \cdot \Delta t}{z \cdot (1 - z^{-1})^2} + \frac{C_1}{1 - z^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}}$$

$$R_1(z) = r_{0,1} + r_{1,1} \cdot z^{-1} + r_{2,1} \cdot z^{-1} + \cdots + r_{i,1} \cdot z^{-i}$$

ISSN 2255-2316

Geruza bakar bat dugun kasuan,

$$C_0 = \frac{1}{R}$$

$$C_1 = \frac{L^2}{3 \cdot \alpha \cdot R}$$

Prozedura bera erabiliz kalkulatuko litzateke,

$$G_{11} = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{B'(z)}{D(z)}$$

$$B'(z) = \frac{D_{G_{11}}(z)}{E(z)} \cdot R_2(z) = \frac{z \cdot \left(1 - z^{-1}\right)^2}{\Delta t} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right] \cdot R_2[z]$$

ISSN 2255-2316

Orain beharrezkoa da $R_1(z)$ kalkulatzea,

$$R_2(z) = \frac{C_0 \cdot \Delta t}{z \cdot (1 - z^{-1})^2} + \frac{C_1}{1 - z^{-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}}$$

Kasu honetan,

$$C_{0,2} = \frac{1}{R}$$

$$C_{1,1} = -\frac{L^2}{6 \cdot \alpha \cdot R}$$

Taula 3-n, erantzunak kalkulatzeko koefizienteen balioak ematen dira:

Taula 3. Erantzunen koefizienteak.

$e_{n,1}$	$r_{n,1}$	$e_{n,2}$	$r_{n,2}$
-131,80	138,20	105,00	0,00
-94,56	195,44	85,30	0,30
-70,63	239,37	67,40	2,40
-53,60	276,40	52,48	7,48
-40,96	309,04	40,57	15,57
-31,40	338,60	31,26	26,26
-24,11	365,89	24,06	39,06
-18,52	391,48	18,50	53,50
-14,23	415,77	14,22	69,22
-10,93	439,07	10,93	85,93

ISSN 2255-2316

Gogora dezagun ze adierazpenekin gabiltzan lanean,

$$A'(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \cdots + a_m \cdot z^{-m}$$

$$A'(z) = \frac{D_{G_{22}}(z)}{E(z)} \cdot R_2(z) = \frac{z \cdot \left(1 - z^{-1}\right)^2}{\Delta t} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - e^{-\beta_n \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}\right] \cdot R_2[z]$$

Honaino iritsi ondoren, gorriz azaltzen diren terminoak ezagunak dira, beraz bakarrik termino guztiak biderkatzea falta da eta *a* terminoen balioa lortzea, ikus Taula 4. *b* koefizienteen balioak lortzeko erabili beharreko prozedura berdina da.

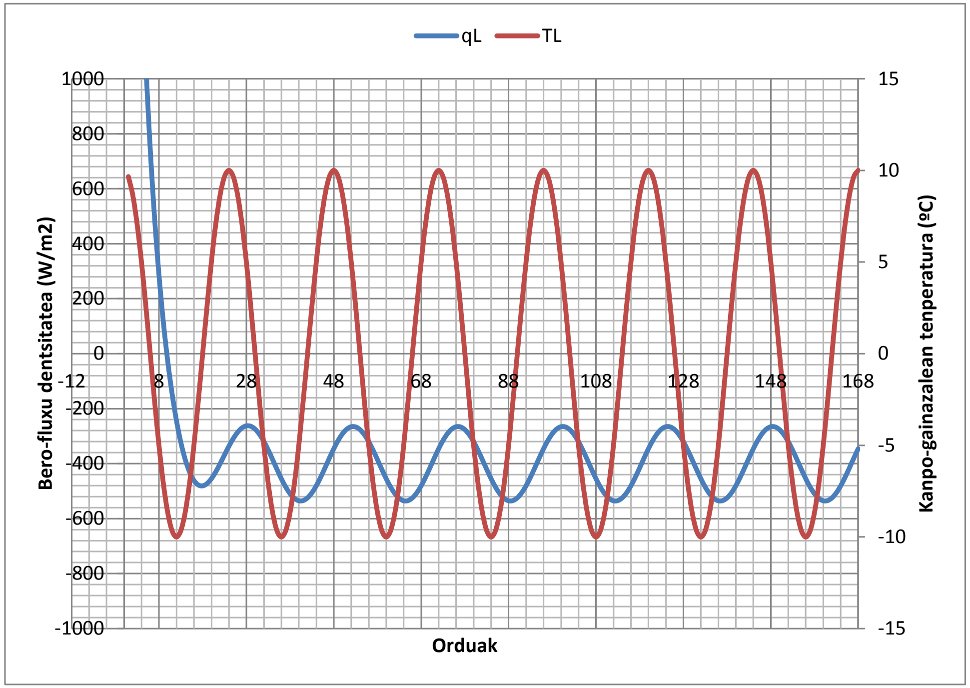
Taula 4. Transferentzia-funtzioaren koefizienteak.

a	b	d
138,20	1,09E-03	1
-250,59	0,30	-1,23
140,31	1,44	0,39
-26,64	0,87	-0,031
1,42	0,081	4,17E-04
-0,014	9,80E-04	-5,50E-07
1,52E-05	1,06E-06	4,11E-11
-9,61E-10	6,33E-11	-1,01E-16
0,00	0,00	4,87E-24
0,00	0,00	-2,67E-33

ISSN 2255-2316

Orain, aldiune bakoitzerako, hurrengo ekuazioa ebaztea baino ez da geratzen. Astebeterako simulazioaren emaitza irudian aurkezten da.

$$q_L(t) = \{T_L(t)\cdot a_0 + T_L(t-\Delta t)\cdot a_1 + T_L(t-2\cdot\Delta t)\cdot a_2 + \cdots + +T_L(t-m\cdot\Delta t)\cdot a_m - [q_L(t-\Delta t)\cdot d_1 + q_L(t-2\cdot\Delta t)\cdot d_2 + \cdots + q_L(t-k\cdot\Delta t)\cdot d_k]\}\cdot\frac{1}{d_0}$$



ISSN 2255-2316

Arazoa abiaraztean, emaitzak zuzenak ez diren denbora-tarte bat dagoela ikusten da, oraindik kalkulua egiteko datu historiko nahikorik ez dagoelako. Era berean, inertziak bero-fluxuaren dentsitatearen bilakaeran duen eragina ikusten da; bero-fluxu dentsitatearen maximoak eta minimoak kanpoko gainazaleko tenperaturaren maximoak eta minimoak baino beranduago gertatzen dira.