DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE VARIABLES ALEATORIAS

TEMA 4

Xabier Erdocia
Itsaso Leceta

eman ta zabal zazu

UPV EHU

OBJETIVOS

- ✓ Ser capaz de identificar la distribución continua que sigue la variable aleatoria
- ✓ Después de identificar la distribución continua que sigue una variable aleatoria, ser capaz de calcular diferentes probabilidades utilizando la función de densidad o distribución
- ✓ Conocer las condiciones que son necesarias para aproximar la distribución binomial a través de la distribución normal y poder realizar correctamente la aproximación

ÍNDICE

4.1. Distribución uniforme

- Cuando la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor en un intervalo finito es igual a los diferentes valores de la variable (para todos los intervalos de igual longitud), se puede decir que la variable sigue una distribución uniforme.

- La variable sigue una distribución uniforme si su función de densidad es:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

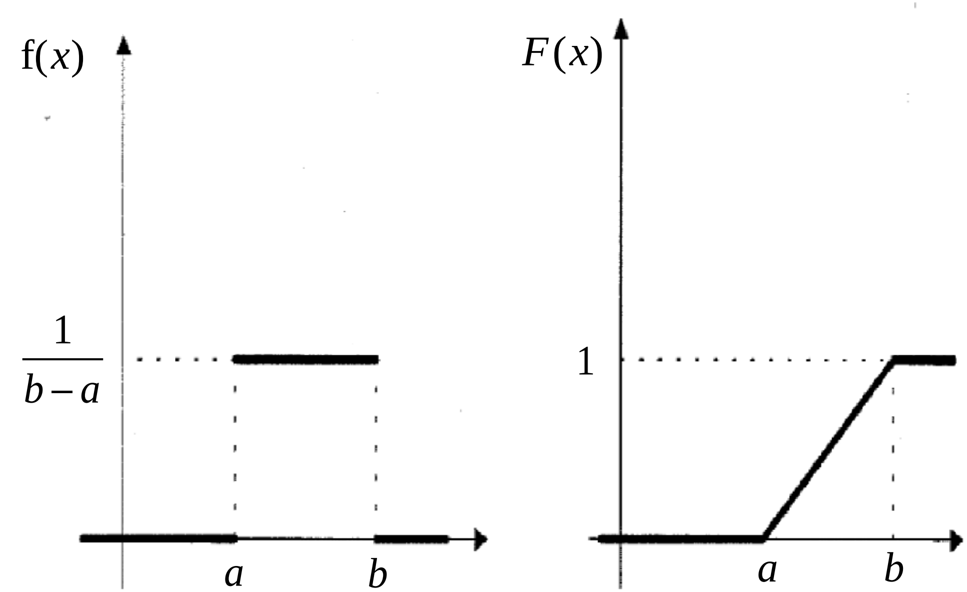
- La función de distribución es:

$$P(X \le x) = F(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- Para calcular la probabilidad de cualquier subintervalo (x_1,x_2) dentro de (a,b):

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - a}{b - a} - \frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{x_2 - x_1}{b - a}$$

- La representación de la función de densidad f(x) y la función de distribución F(x) son las siguientes:



- La media de una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme es:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

- Conociendo la función de densidad, se pueden calcular otros momentos y medidas. Por ejemplo, el valor de la varianza es:

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2. Distribución exponencial

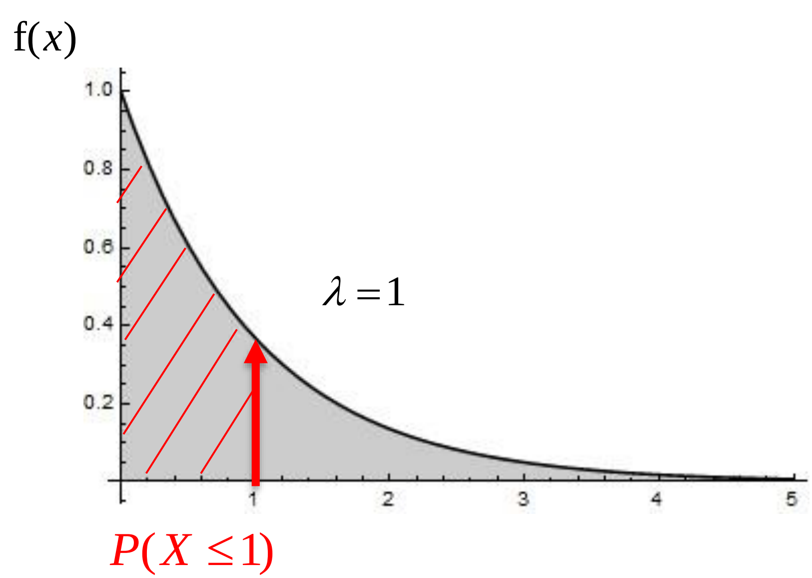
- La distribución exponencial es muy utilizada para caracterizar la vida útil de diferentes dispositivos.

- Cuando la variable aleatoria sigue una distribución exponencial, su función de densidad y su función de distribución son las siguientes:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

- Por ejemplo, cuando λ=1 la función de densidad sería la siguiente.
- Además, el área roja representa la probabilidad P(X≤1).



- La media de una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial es:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Conociendo la función de densidad, se pueden calcular otros momentos y medidas. Por ejemplo, el valor de la varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.3. Distribución normal

eman ta zabal zazu

UPV EHU

- La distribución normal es una de las distribuciones más importantes. Es fundamental en la inferencia estadística, ya que muchas muestras tienden a seguir una distribución normal.

- La variable aleatoria sigue una distribución normal cuando su función de densidad es:

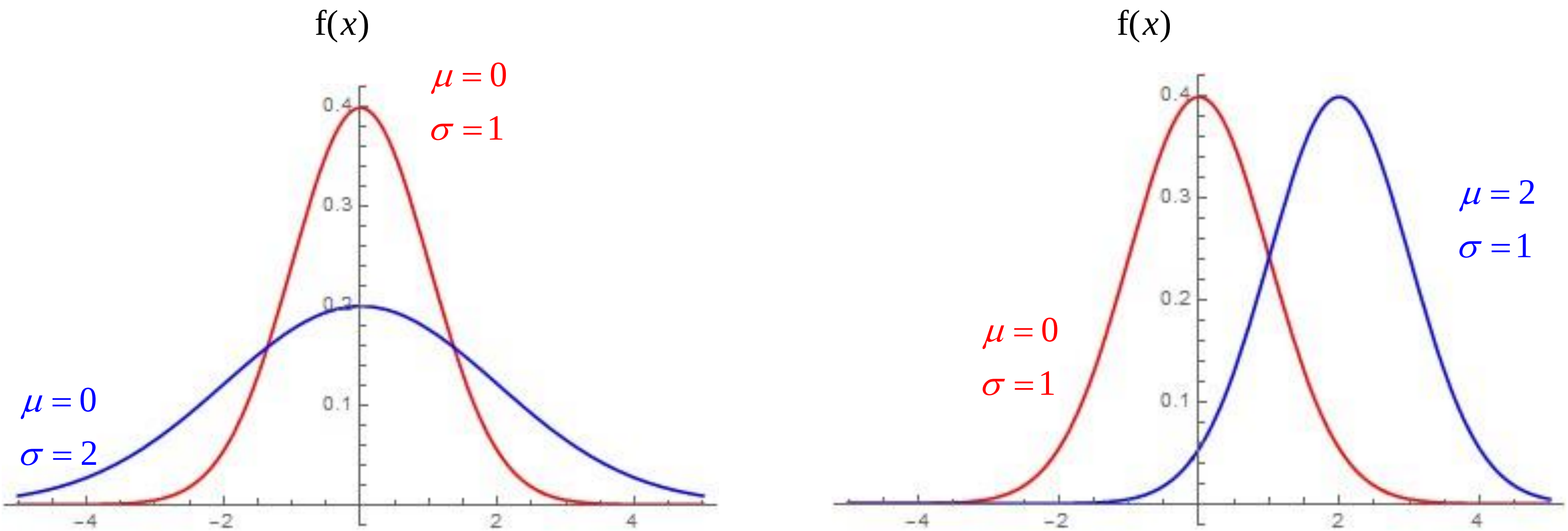
$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- La función de densidad de la distribución normal está determinada por los parámetros μ y σ.

- Cuando la variable sigue una distribución normal se expresa como:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- La función de densidad tiene el siguiente aspecto:



- Se puede observar que la curva tiene forma de campana. Esta distribución también se llama distribución de Gauss. Puede observarse la variación de la curva para los diferentes valores de los parámetros.

- Como puede verse en la figura, la función de densidad es una curva simétrica. El máximo se da para x=μ y los puntos de inflexión se encuentran en los puntos x= μ±σ.

- La media de la distribución:

$$E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\mu$$

- La varianza de la distribución:

$$\text{Varianza}(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx=\sigma^2$$

- De modo que, los parámetros de la distribución son μ y σ, donde μ es la media de la distribución y σ la desviación estándar.

- La función de distribución es:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

- Dado que esta integral no es una combinación lineal de funciones elementales, debe ser resuelta mediante métodos numéricos para cada x, por cada par de valores de σ y μ. Para facilitar este trabajo se realiza el siguiente cambio de variable:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

- Z es una variable estandarizada donde la media es 0 y la desviación típica es 1.

$$F(x) = P(X \le x) = P(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left[-\frac{z^2}{2} \right] \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{z^2}{2} \right] dz$$

- Si la variable X se distribuye normalmente con media μ y desviación estándar σ, Z también se distribuye normalmente con un valor para la media de 1 y una desviación estándar de 0. Por lo tanto:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z)$$

- F(z) se llama función de distribución tipificada y está tabulada (la tabla se adjunta en este curso). Así, los valores de la función de distribución tipificada se pueden consultar directamente en esta tabla.

- El uso de la tabla: P(Z≤0,23)=0,5910

- Para ello nos fijamos en la tercera fila 3 de la tabla y para sacar el segundo decimal tenemos que ir a la cuarta columna.

- Por la simetría: $P(Z \geq z)=1-P(Z \leq z)$
  $P(Z \leq -z)=P(Z \geq z)$
  $P(z_1 \leq Z \leq z_2)=P(Z \leq z_2)-P(Z \leq z_1)$

- Aproximación de la distribución binomial a través de la distribución normal:

- Si X es una variable aleatoria discreta unidimensional que sigue una distribución binomial y $n \rightarrow \infty$, entonces la distribución binomial se puede aproximar a través de la distribución normal.

$$B(n, p) \cong N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$$

- La aproximación es buena cuando:

$$n \geq 30$$
$$np \geq 5$$
$$nq \geq 5$$

- Aproximación de la distribución binomial a través de la distribución normal:

- Dado que una variable discreta se aproxima a través de una variable continua y como ya se explicó en la lección 2, la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor concreto es 0 , la aproximación se realiza mediante una corrección de medio punto:

$$P(X_{discreta} \leq a) = P(X_{continua} \leq a + 0,5) = P(X_{continua} < a + 0,5)$$
$$P(X_{discreta} \geq a) = P(X_{continua} \geq a - 0,5) = P(X_{continua} > a - 0,5)$$
$$P(X_{discreta} < a) = P(X_{continua} \leq a - 0,5) = P(X_{continua} < a - 0,5)$$
$$P(X_{discreta} > a) = P(X_{continua} \geq a + 0,5) = P(X_{continua} > a + 0,5)$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea