TEMA 4. EJERCICIOS RESUELTOS

1. El tiempo que tarda un estudiante en llegar de su casa a la universidad varía uniformemente entre 35 y 45 minutos. ¿A qué hora debe salir de casa para llegar a tiempo a clase con una probabilidad mínima de 0,8 si las clases empiezan a las 8 a.m.?

$X =$ "Minutos de casa a la universidad"

La variable sigue una distribución uniforme. $X \sim U[35,45]$

$$P(X \leq x) \geq 0{,}8 \Rightarrow \frac{x-35}{45-35} \geq 0{,}8 \Rightarrow x \geq 43$$

Por lo tanto si el estudiante sale de casa a las 7:17 a.m. o antes, llegará a clase a tiempo con una probabilidad de 0,8 o mayor.

2. En una tienda, el tiempo que esperamos desde la entrada de un cliente hasta la entrada del siguiente cliente se distribuye exponencialmente con una media de 5 minutos. Calcule la probabilidad de que se tenga que esperar entre 8 y 10 minutos hasta la entrada del siguiente cliente.

X :'Minutos que hay que esperar hasta la entrada del siguiente cliente'. $X \sim \varepsilon(1/\lambda)$

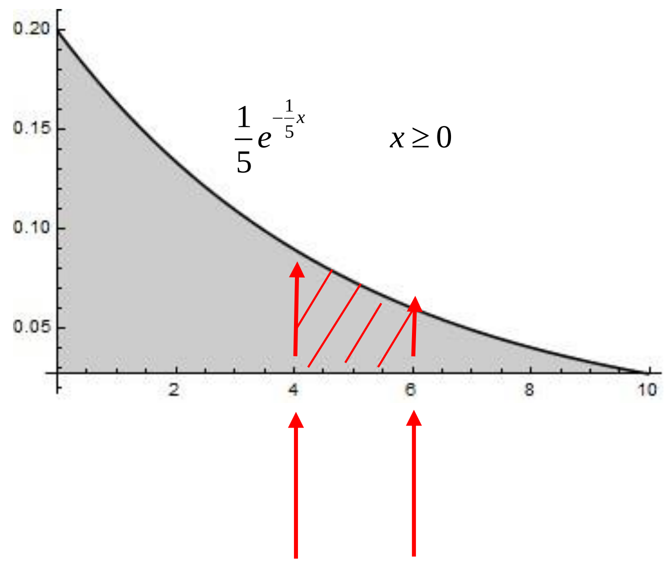
$$E(X)=5=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow \lambda=\frac{1}{5}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} & x\geq 0 \quad \wedge \quad \lambda>0\\ 0 & \text{otros}\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{5}x} & x\geq 0\\ 0 & \text{otros}\end{cases}$$

$$P(4\leq X\leq 6)=P(X\leq 6)-P(X\leq 4)$$

El ejercicio requiere calcular la probabilidad de un intervalo. Para calcular la superficie que aparece en el gráfico esto es lo que debemos hacer.



$$P(4\leq X\leq 6)=\left(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot 6}\right)-\left(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot 4}\right)=0{,}148$$

3. Un bote de mermelada se clasifica como “sirope” si la cantidad de azúcar está entre 420 y 520 g. El fabricante al analizar las macetas observa que el peso promedio es de 465 g con una desviación estándar de 30 g. Sabiendo que el peso del azúcar sigue una distribución normal.

   a) ¿Qué porcentaje de la producción del fabricante no se puede etiquetar como "sirope"?

   b) ¿Cuáles son los dos valores centrales que se tienen que fijar para que entre ellos haya el 50% de los botes?

X : 'Cantidad de azucar en g dentro del bote'

$420 \leq X \leq 520 \rightarrow$ Botes que pueden considerarse 'sirope'

$X<420$ y $X>520 \rightarrow$ Botes que no pueden considerarse 'sirope'

$E(X) = 465$ g y $\sigma = 30$ g $\qquad X \sim N(465;30)$

a)

Dos maneras de resolución:

1)

$$P(420 \leq X \leq 520) = P(X \leq 520) - P(X \leq 420)$$

$$Z = \frac{x-465}{30}$$

$$P(420 \leq X \leq 520) = P(Z \leq \frac{520-465}{30}) - P(Z \leq \frac{420-465}{30}) = P(Z \leq 1,83) - P(Z \leq -1,5)$$

$P(Z \leq 1,83) = 0,9664$ Valor consultado en la tabla

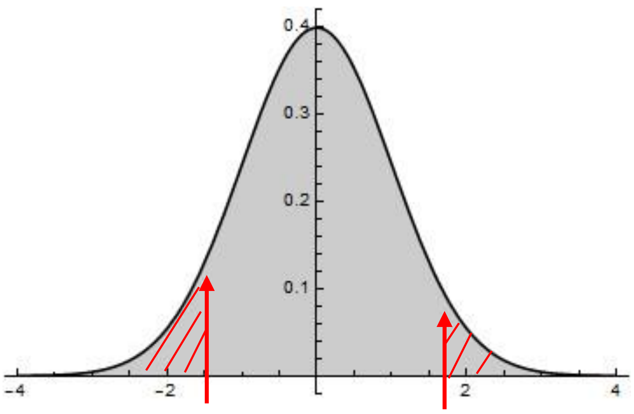
$P(Z \leq -1,5)$ En nuestra tabla no hay valores negativos por lo que aplicamos simetría.

$$P(Z \leq -1,5) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

$$P(420 \leq X \leq 520) = P(Z \leq 1,83) - P(Z \leq -1,5) = 0,9664 - 0,0668 = 0,8996$$

$$1 - P(420 \leq X \leq 520) = 0,1004$$

Por lo tanto, el 10,04% no puede ser etiquetado como 'sirope'



Distribución normal tipificada

La probabilidad que se ha de calcular está representada por la superficie roja. Como el valor de toda la superficie debajo de la curva es 1, se debe restar el valor de probabilidad intermedia calculado para obtener la superficie roja.

2)

$P(X \geq 520) + P(X \leq 420)$

$Z = \dfrac{x-465}{30}$

$P(X \geq 520) + P(X \leq 420) = P(Z \geq \dfrac{520-465}{30}) + P(Z \leq \dfrac{420-465}{30}) = P(Z \geq 1,83) + P(Z \leq -1,5)$

$P(Z \geq 1,83)$ Los valores que tenemos en la tabla son $P(Z \leq z)$.
Por lo tanto debemos aplicar simetría para poder encontrar el valor en la tabla.

$P(Z \geq 1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336$

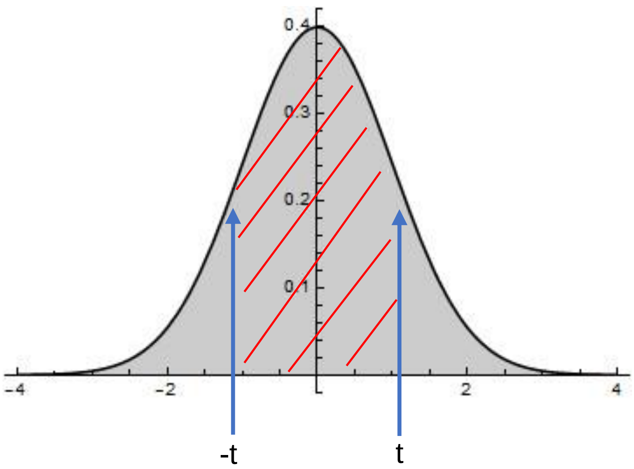
$P(Z \leq -1,5)$ En nuestra tabla no hay valores negativos por lo que aplicamos simetría.

$P(Z \leq -1,5) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

$P(X \geq 520) + P(X \leq 420) = P(Z \geq 1,83) + P(Z \leq -1,5) = 0,0336 - 0,0668 = 0,1004$

Por lo tanto el 10,04% no puede etiquetarse como 'sirope'.

b)



Distribución normal tipificada

Esta sección requiere el cálculo de los valores centrales b y a (para usar la distribución normal estandarizada después del cambio de variable -t y t). Cada uno de ellos está a la misma distancia de la media de la distribución. La información que proporcionan es que la superficie roja entre ellos debe ser del 50%.

Uitlizaremos la distribución normal tipificada:

$$P(b \le X \le a) = P(X \le a) - P(X \le b)$$

$$Z = \frac{x - 465}{30}$$

Aplicaremos simetría múltiples veces:

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(-t \le Z \le t) = P(Z \le \frac{a-465}{30}) - P(Z \le \frac{b-465}{30}) = P(Z \le t) - P(Z \le -t)$$

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(Z \le t) - P(Z \le -t) = P(Z \le t) - P(Z \ge t) =$$

$$P(Z \le t) - \left(1 - P(Z \le t)\right) = -1 + 2P(Z \le t) = 0.5 \Rightarrow P(Z \le t) = 0,75$$

El valor de la tabla que tiene la probabilidad de 0,75 es:

$$P(Z \le t) = 0,75 \Rightarrow t = 0,68$$

$$t = \frac{a-465}{30} \Rightarrow a = 485,4 \text{ g} \quad \text{y}$$

$$-t = \frac{b-465}{30} \Rightarrow b = 444,6 \text{ g}$$

Por lo que los valores centrales a y b son 485,4 g y 444,6 g.

4. En una fábrica se producen dos tipos de piezas, una de ellas elaborada con materiales renovables y otra con materias primas derivadas del petróleo.

a) Si el 2% está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar 100 piezas no haya más de 3 defectuosos?

b) El 40% son piezas basadas en materiales renovables. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar 600 piezas, 352 o más piezas sean de materias primas derivadas del petróleo?

a)

X : 'Número de piezas defectuosas'

n=100; p=0,02 $\quad$ $X \sim B(100;0,02)$

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$$P(X \leq 3) = \binom{100}{0} 0,02^0 (1-0,02)^{100-0} + \binom{100}{1} 0,02^1 (1-0,02)^{100-1} +$$

$$\binom{100}{2} 0,02^2 (1-0,02)^{100-2} + \binom{100}{3} 0,02^3 (1-0,02)^{100-3} = 0,8589$$

$P(X \leq 3) = 0,8589$

b)

X : 'Número de piezas defectuosas elaboradas con materias primas derivadas del petróleo'

n=600; p=0,6 $\quad$ $X \sim B(600;0,6)$

$P(X \geq 352)$ para el cálculo aproximaremos la distribución binomial con la distribución normal.

Vamos a comprobar que se satisfacen las condiciones para realizar la aproximación:

n=600>30

np=360 ≥ 5

nq=240 ≥ 5

Es posible realizar la aproximación ya que las condiciones se satisfacen.

$X \sim B(600;0,6) \cong X \sim N(\mu=\text{np};\sigma^2=\text{npq}) = N(\mu=600 \cdot 0,6;\sigma^2=600 \cdot 0,6 \cdot 0,4) = N(\mu=360;\sigma^2=144)$

$P(X_{discreta} \geq 352) = P(X_{continua} \geq 351,5)$

$$P(X_{discreta} \geq 352) = P(X_{continua} \geq 351,5) = P\left(Z \geq \frac{351,5-360}{12}\right) = P(Z \geq -0,71)$$

$P(Z \geq -0,71) = P(Z \leq 0,71)$ se toma el valor de la tabla de la distribución normal tipificada.

$P(Z \leq 0,71) = 0,7611$

$P(X_{discreta} \geq 352) = P(X_{continua} \geq 351,5) = 0,7611$