TEMA 1. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea X una variable aleatoria continua con media $E(X)$ y varianza $\sigma_x{}^2$. Determine la media y la varianza de la variable aleatoria Y sabiendo que $Y = aX + b$.

$E(Y)$?

$\sigma_y{}^2$?

$$E(Y) = E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\,\mathrm{f}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax\,\mathrm{f}(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b\,\mathrm{f}(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{f}(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)dx =$$

$$= aE(X) + b$$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$\sigma_y^2 = E(Y - E(Y))^2 = E((aX+b) - (aE(X)+b))^2$$

$$\sigma_y^2 = E(aX + b - aE(X) - b)^2 = E(aX - aE(X))^2 = aE(X - E(X))^2 = a\sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = a\sigma_x^2$$

2. Una variable aleatoria puede tomar los siguientes valores discretos: {2,3,7,8,10}. Sabiendo que todos los eventos tienen la misma probabilidad, calcule los momentos de orden uno y orden dos no centrados, el momento de orden uno centrado en la media, el momento de orden dos centrado en la media y los momentos de orden uno y orden dos cuando $a=4$.

$$\alpha_1 = E(X)^1 = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = 2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+7\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}=6 \qquad \alpha_1 = 6$$

$$\alpha_2 = E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 p(x_i) = 2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}+7^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}+10^2\cdot\frac{1}{5}=45.2 \qquad \alpha_2 = 45,2$$

$$\mu_1 = E(X-E(X))^1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))p(x_i) =$$

$$\mu_1 = (2-6)\cdot\frac{1}{5}+(3-6)\cdot\frac{1}{5}+(7-6)\cdot\frac{1}{5}+(8-6)\cdot\frac{1}{5}+(10-6)\cdot\frac{1}{5}=0 \qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E(X-E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) =$$

$$\mu_2 = (2-6)^2\cdot\frac{1}{5}+(3-6)^2\cdot\frac{1}{5}+(7-6)^2\cdot\frac{1}{5}+(8-6)^2\cdot\frac{1}{5}+(10-6)^2\cdot\frac{1}{5}=9,2 \qquad \mu_2 = \sigma^2 = 9,2$$

$$\alpha_{1,4} = E(X-4)^1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 4)p(x_i) =$$

$$\alpha_{1,4} = (2-4)\cdot\frac{1}{5}+(3-4)\cdot\frac{1}{5}+(7-4)\cdot\frac{1}{5}+(8-4)\cdot\frac{1}{5}+(10-4)\cdot\frac{1}{5}=2 \qquad \alpha_{1,4} = 2$$

$$\alpha_{2,4} = E(X-4)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 4)^2 p(x_i) =$$

$$\alpha_{2,4} = (2-4)^2\cdot\frac{1}{5}+(3-4)^2\cdot\frac{1}{5}+(7-4)^2\cdot\frac{1}{5}+(8-4)^2\cdot\frac{1}{5}+(10-4)^2\cdot\frac{1}{5}=13,2 \qquad \alpha_{2,4} = 13,2$$

3. Una variable aleatoria puede tomar los siguientes valores discretos: {2,3,7,8,10}. Sabiendo que todos los eventos tienen la misma probabilidad, calcule los valores de asimetría y curtosis y describa brevemente la forma de la distribución.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sigma^3} E(X - E(X))^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = E(X - E(X))^3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^3 p(x_i) =$$

$$\mu_3 = (2-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^3 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^3 \cdot \frac{1}{5} = -3,6 \qquad \mu_3 = -3,6$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) =$$

$$\sigma^2 = (2-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^2 \cdot \frac{1}{5} = 9,2 \qquad \sigma^2 = 9,2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9,2}$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-3.6}{\left(\sqrt{9,2}\right)^3} = -0,13$$

El valor se encuentra muy cerca de 0, por lo que es un sesgo ligeramente negativo

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\mu_4 = E(X - E(X))^4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^4 p(x_i) =$$

$$\mu_4 = (2-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^4 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^4 \cdot \frac{1}{5} = 122 \qquad \mu_4 = 122$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) =$$

$$\sigma^2 = (2-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (3-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (7-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (8-6)^2 \cdot \frac{1}{5} + (10-6)^2 \cdot \frac{1}{5} = 9,2 \qquad \sigma^2 = 9,2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9,2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{122}{\left(\sqrt{9,2}\right)^4} - 3 = -1,56$$

El valor es negativo por lo que se podría decir que la distribución es ligeramente platicúrtica.

4. La media de una variable aleatoria es 7 y el momento centrado en la media de orden dos es 4. Calcule la probabilidad mínima de que la variable aleatoria esté dentro de (4, 14).

   Se aplicará la desigualdad de Tchebychev.

$$P(E(X)-k\sigma < X < E(X)+k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>0$$

$$P(4 < X < 10) \geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>0$$

$$4 = E(X)-k\sigma \qquad 4=7-k2 \qquad k=\frac{3}{2} \quad \text{o}$$

$$10 = E(X)+k\sigma \qquad 10=7+k2 \qquad k=\frac{3}{2}$$

$$P(4 < X < 10) \geq 1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{9}$$

5. El tiempo de espera de un peatón en un semáforo es una variable aleatoria continua. Una persona llega al azar al cruce ¿cuál es el tiempo promedio de espera? La función de densidad de la variable aleatoria es (los valores están en segundos) la siguiente:

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x}{80} & 0 < x < 30 \\ 0 & 80 < x < \infty \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{f}(x)dx=\int_{0}^{30} x\frac{x}{80}dx=\int_{0}^{30}\frac{x^2}{80}dx=\left.\frac{x^3}{240}\right]_0^{30}=\left.\frac{30^3}{240}\right]=112{,}5 \text{ segundos}$$