TEMA 3: EJERCICIOS RESUELTOS

1. El 8% de los análisis para el control del colesterol tienen resultados erróneos y es necesario repetir dichos análisis.

   a) Si se realiza un análisis, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea incorrecto?

   b) Si se observan 15 análisis aleatorios, ¿cuál es la probabilidad de que haya que repetir al menos 2 análisis?

   c) ¿Cuál es el número de análisis que se espera repetir de entre 200 análisis realizados?

   d) Si en un día el laboratorio ha realizado 50 análisis, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan tenido que repetir a lo sumo 3 análisis?

a) En primer lugar, se definirá la variable aleatoria y se identificará la distribución que sigue.

$$X: \text{'Análisis de control de colesterol con resultado erroneo'}$$
$$X \sim \text{Binaria}(p = 0,08)$$

$$P(X=1) = 0,08^1 \cdot 0,02^0 = \boxed{0,08}$$

b) En este caso, el ensayo binario se repite numerosas veces por lo que se ha de definir una nueva variable aleatoria, así como la distribución que sigue.

$$X: \text{'Número de análisis de colesterol con resultado erroneo de entre 15'}$$
$$X \sim B(n=15,\ p=0,08)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0,08^0 \cdot 0,92^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0,08^1 \cdot 0,92^{14}\right] = \boxed{0,3403}$$

c) Para calcular el número de análisis que se espera repetir, se ha de calcular la media o la esperanza matemática de la variable aleatoria.

$$n = 200$$
$$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0,08 = \boxed{\text{16 análisis se esperan repetir.}}$$

d) En este caso, dado que $n = 50 > 30$ y $p = 0,08 < 0,1$, la distribución binomial puede aproximarse mediante una distribución de Poisson.

X : 'Número de análisis de colesterol con resultado erroneo de entre 15'

$X \sim B(n=50, p=0,08) \cong \mathscr{P}(n \cdot p = 4)$

Por lo que,

$$P(X \leq 3) = \left[e^{-4} \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} \right) \right] = \boxed{0,4335}$$

2. La probabilidad de que los ensayos realizados con un equipo de ultrasonidos sean efectivos es del 80%. Asumiendo que los ensayos son independientes, calcule:

   a) La probabilidad de que el primer ensayo efectivo ocurra en el quinto intento.

   b) La probabilidad de que tengan que realizarse al menos cuatro ensayos para obtener el primer ensayo efectivo.

   c) La probabilidad de que sean necesarios 12 ensayos para lograr 5 ensayos efectivos.

   d) La probabilidad de tener que realizar un máximo de 10 ensayos y un mínimo de 7 para obtener 3 ensayos efectivos.

a) En primer lugar, se definirá la variable aleatoria y se identificará la distribución que sigue.

X : 'Número de ensayos realizados hasta obtener el primer ensayo efectivo'

$X \sim G(p = 0,8)$

Para que el quinto ensayo sea efectivo, los cuatro ensayos previos deben ser inefectivos, por lo tanto:

$$P(X = 4) = (1 - p)^x \cdot p = 0,2^4 \cdot 0,8 = \boxed{0,00128}$$

b) Para que el número mínimo de ensayos que se ha de realizar hasta obtener el primero efectivo sea cuatro, al menos tres ensayos deben resultar inefectivos.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\right] =$$
$$= 1 - \left[\left(0,2^0 \cdot 0,8\right) + \left(0,2^1 \cdot 0,8\right) + \left(0,2^2 \cdot 0,8\right)\right] = \boxed{0,008}$$

c) En este caso, se ha de modificar la variable aleatoria y por tanto la distribución que sigue es diferente, de una geométrica pasa a ser una binomial negativa. Para que 5 ensayos de entre 12 sean efectivos, 7 deben no serlo.

X : 'Número de ensayos realizados hasta lograr 5 ensayos efectivos'

$X \sim BN(n = 5, p = 0,8)$

$$P(X = 7) = \binom{n + x - 1}{x} \cdot q^x \cdot p^n = \binom{11}{7} \cdot 0,2^7 \cdot 0,8^5 = \boxed{0,00138}$$

d) En este caso, para logar 3 ensayos efectivos, los ensayos inefectivos deben ser entre 4 y 7.

X :'Número de ensayos realizados hasta lograr 3 ensayos efectivos'

$X \sim BN(n=3, p=0,8)$

$$P(4 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X < 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$

$$P(4 \le X \le 7) = \binom{6}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^3 + \binom{7}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^3 + \binom{8}{6} \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^3 + \binom{9}{7} \cdot 0,2^7 \cdot 0,8^3 = \boxed{0,0169}$$

3. En una empresa eléctrica que fabrica fusibles, la probabilidad de que los fusibles sean defectuosos es de 0,2. Un cliente compra 15 fusibles, pero únicamente utiliza 5 de ellos.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 2 de esos 5 fusibles sean defectuosos?
    b) ¿Cuál es el número de fusibles defectuosos que se esperan de entre esos 5 fusibles?
    c) Otro cliente ha adquirido una caja con 200 fusibles para usar 10 de ellos. En este caso, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 de esos 10 fusibles sea defectuoso?

a) En primer lugar, se definirá la variable aleatoria y se identificará la distribución que sigue.

X : 'Número de fusibles defectuosos de entre 5 empleados'

$X \sim H(N = 15, n = 5, p = 0,2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{12}{5} + \binom{3}{1}\binom{12}{4} + \binom{3}{2}\binom{12}{3}}{\binom{15}{5}} = \boxed{0,9780}$$

b) Con el fin de calcular el número de fusibles defectuosos esperados, se ha de calcular la media o la esperanza matemática de la variable aleatoria.

$n = 5; \ p = 0,2$

$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0,2 = 1.$ $\boxed{\text{Se espera que uno de los fusibles sea defectuoso.}}$

c) En este caso, $N = 200$ y $n = 10$, por lo que $N > 10 \cdot n$; con lo cual, la distribución hipergeométrica puede aproximarse mediante una distribución binomial.

X : 'Número de fusibles defectuosos de entre 10 empleados'

$X \sim H(N = 200, n = 10, p = 0,2) \cong B(n = 10, p = 0,2)$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$P(X \leq 2) = \binom{10}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = \boxed{0,6778}$$

4. En una fábrica de lanas de Edimburgo, por cada 5 metros de tela producida aparece un defecto. Sabiendo que el número de defectos que aparece en la tela sigue una distribución de Poisson, calcule:

   a) Si se compran cinco metros de tela, la probabilidad de que haya más de dos defectos.

   b) Si se compran 50 metros de tela para realizar 15 kilts (típica falda escocesa), la probabilidad de encontrar siete defectos.

a) En primer lugar, se definirá la variable aleatoria y se identificará la distribución que sigue.

X : 'Número de defectos por cada cinco metros de tela de lana'

$X \sim P(\lambda = 1)$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[e^{-1} \left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} \right) \right] = \boxed{0,0803}$$

b) En este caso, se ha de calcular un nuevo valor del parámetro λ, dado que la variable aleatoria es diferente. En vez de contar con 5 metros de tela se cuentan con 50 metros, por lo que el parámetro λ se modifica linealmente.

X : 'Número de defectos por cada cincuenta metros de tela de lana'

$X \sim P(\lambda = 1 \cdot 10)$

$$P(X = 7) = \frac{e^{-10} \cdot 10^7}{7!} = \boxed{0,0901}$$