TEMA 2: EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una máquina produce botellas de plástico de cuatro colores diferentes. La probabilidad de producir botellas de cada color se muestra en la siguiente tabla:

Color	1	2	3	4
Probabilidad	4/25	6/25	17/50	13/50

Sea X una variable aleatoria discreta que define el color de las botellas de plástico. Halle la función característica de dicha variable aleatoria y calcule los dos primeros momentos respecto al origen empleando la función característica.

Solución: $\Psi(t)=\frac{1}{50}\left(8e^{it}+12e^{2it}+17e^{3it}+13e^{4it}\right)$; $\alpha_1=\frac{27}{10}$; $\alpha_2=\frac{417}{50}$

2. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución es la siguiente:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/5 & 0\le x<1 \\ 1/3 & 1\le x<2 \\ 7/15 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

Calcule la función de probabilidad, la función generadora de momentos y empleando esta última, calcule la varianza de dicha variable.

Solución:

$$p(x)=\begin{cases} 1/5 & x=0 \\ 2/15 & x=1 \\ 2/15 & x=2 \\ 8/15 & x=3 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad ;\ \alpha(w)=\frac{2}{15}\left(\frac{3}{2}+e^{w}+e^{2w}+4e^{3w}\right);\ \sigma^2=\frac{4}{5}$$

3. El consumo de gasolina (L/100 km) de un nuevo modelo producido en el norte de Italia por una conocida compañía de motocicletas se define mediante una variable aleatoria continua. Esta variable tiene la siguiente función de densidad:

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases} mxe^{-x^2} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

a) ¿Cuál debe ser el valor de la constante m para que $\mathrm{f}(x)$ sea una función de densidad?

b) Logre la función de distribución de la variable aleatoria continua.

c) Calcule la probabilidad de que el consume de gasolina del nuevo modelo sea mayor que $2,5$ litros/100 km y la probabilidad de que el consumo de gasolina se encuentre entre $0-1,5$ litros/100 km.

Solución: a) $m=2$; b) $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x^2} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$; c) 0,8946 y $0,0190$

4. Un técnico de alto nivel de una industria inglesa mide la concentración de plomo en unas pinturas para uso aeronáutico. Sea la variable aleatoria continua X = “concentración de plomo”. La concentración media de plomo en las pinturas es de 3 ppm y la función generadora de momentos de esta variable aleatoria es $\alpha(w)=\dfrac{\left(1+e^{aw}\right)^2}{4}$. Calcule:

a) El valor de la constate a.

b) Los tres primeros momentos respecto al origen de la variable X.

c) La desviación típica de la variable X.

Solución: a) $a=3$; b) $\alpha_1=3$, $\alpha_2=\dfrac{27}{2}$, $\alpha_3=\dfrac{135}{2}$; c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

5. Sean $\Psi_X(t)=kt^2+1$ y $\Psi_Y(t)=2kt$ las funciones características de dos variables aleatorias independientes X e Y respectivamente. Sea $Z=3X+Y$ y la media de la variable aleatoria Z igual a 2. Calcule:

a) El valor de la constante k.

b) Las medias de las variables X e Y.

Solución: a) $k=i$; b) $\alpha_{1x}=0$; $\alpha_{1y}=2$