TEMA 2: EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad, $p(x)$, se define a continuación:

$$p(x)=\begin{cases} 2m & x=1 \\ m & x=2,3,4 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

a) Determine el valor de la constante m.

b) Logre la función característica de la variable aleatoria discreta X .

c) Determine la media de la variable aleatoria discreta X empleando la función característica.

a)

Para que $p(x)$ sea una función de probabilidad:

1) $p(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m\geq 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=1\Rightarrow 2m+m+m+m=1;\ 5m=1;\ \boxed{m=\frac{1}{5}}$

b)

$$\Psi(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k}\cdot p(x_k)=e^{it}\cdot\frac{2}{5}+e^{2it}.\frac{1}{5}+e^{3it}.\frac{1}{5}+e^{4it}.\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{5}\left(2e^{it}+e^{2it}+e^{3it}+e^{4it}\right)}$$

c)

Dado que la media es el momento de primer orden respecto al origen:

$$\alpha_1=\frac{1}{i}\frac{d\Psi(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{i}\frac{1}{5}\left(2ie^{it}+2ie^{2it}+3ie^{3it}+4ie^{4it}\right)\Big|_{t=0}=\frac{1}{5}(2+2+3+4)=\boxed{\frac{11}{5}}$$

2. Se quiere estudiar la cinética de una reacción química y se ha demostrado que la función de densidad de la variable aleatoria continua asociada al consumo de reactivo (mol/min) es la siguiente:

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases} ke^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

a) ¿Cuál debe ser el valor de la constante k para que $\mathrm{f}(x)$ sea una función de densidad?

b) Logre la función de distribución de la variable aleatoria continua.

c) Determine la probabilidad de que la velocidad de la reacción (consumo de reactivo) sea superior a 10 mol/min.

a)

Para que $\mathrm{f}(x)$ sea una función de densidad:

1) $\mathrm{f}(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow k\geq 0$

2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{+\infty}ke^{-x}dx=1;\ 0+\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}ke^{-x}=1;\ \lim_{t\to\infty}-ke^{-x}\Big|_{0}^{t}=1;\ \lim_{t\to\infty}\left(-ke^{-t}+ke^{0}\right)=1$$

$$\boxed{k=1}$$

b)

$x\leq 0$:

$$\int_{-\infty}^{x}\mathrm{f}(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$$

;

$x>0$:

$$\int_{0}^{x}\mathrm{f}(t)dt=\int_{-\infty}^{x}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-x}$$

Por tanto, la función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

c)

$$P(X>10)=1-P(X\leq 10)=1-F(10)=1-(1-e^{-10})=\boxed{e^{-10}}$$

3. Una variable aleatoria discreta X puede tomar los valores -1, 0 y 1 con la misma probabilidad.

   a) Logre la función generadora de momentos de la variable X .

   b) Calcule los cuatro primeros momentos respecto al origen de la variable X .

a)

$$\alpha(w) = E(e^{wx}) = e^{w(-1)}\left(\frac{1}{3}\right) + e^{w(0)}\left(\frac{1}{3}\right) + e^{w(1)}\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(1+e^{-w}+e^{w}\right)}$$

b) Para obtener los cuatro primeros momentos respecto al origen, se ha de derivar la función generadora de momentos y evaluarla en $w=0$.

Momento de primer orden: $$\left.\frac{dE(e^{wx})}{dw}\right|_{w=0} = \left.\frac{1}{3}\left(0-e^{-w}+e^{w}\right)\right|_{w=0} = 0$$

Momento de segundo orden: $$\left.\frac{d^2E(e^{wx})}{dw^2}\right|_{w=0} = \left.\frac{1}{3}\left(0+e^{-w}+e^{w}\right)\right|_{w=0} = \frac{2}{3}$$

Momento de tercer orden : $$\left.\frac{d^3E(e^{wx})}{dw^3}\right|_{w=0} = \left.\frac{1}{3}\left(0-e^{-w}+e^{w}\right)\right|_{w=0} = 0$$

Momento de cuarto orden: $$\left.\frac{d^4E(e^{wx})}{dw^4}\right|_{w=0} = \left.\frac{1}{3}\left(0+e^{-w}+e^{w}\right)\right|_{w=0} = \frac{2}{3}$$

Como puede observarse, los momentos impares respecto al origen son 0 y los momentos pares son $\frac{2}{3}$.

4. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad, $\mathrm{f}(x)$, es la siguiente:

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0\le x\le 3\\ 0 & \text{otros casos}\end{cases}$$

a) Logre la función característica de la variable aleatoria.

b) Logre la función generadora de momentos de la variable aleatoria.

c) Calcule la media de la variable aleatoria.

a)

$$\Psi(t)=E\left(e^{itx}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,\mathrm{f}(x)dx=\int_{-\infty}^{0}e^{itx}0dx+\int_{0}^{3}e^{itx}\frac{1}{3}dx+\int_{3}^{+\infty}e^{itx}0dx=\frac{1}{3}\frac{e^{itx}}{it}\bigg|_{0}^{3}=\frac{1}{3it}\left(e^{3it}-e^{0it}\right)=\boxed{\frac{e^{3it}-1}{3it}}$$

b)

$$\alpha(w)=E\left(e^{wx}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{wx}\,\mathrm{f}(x)dx=\int_{-\infty}^{0}e^{wx}0dx+\int_{0}^{3}e^{wx}\frac{1}{3}dx+\int_{3}^{+\infty}e^{wx}0dx=\frac{1}{3}\frac{e^{wx}}{w}\bigg|_{0}^{3}=\frac{1}{3w}\left(e^{3w}-e^{0w}\right)=\boxed{\frac{e^{3w}-1}{3w}}$$

c)

$$\alpha_1=\frac{d\alpha(w)}{dw}\bigg|_{w=0}=\frac{\left(3e^{3w}\cdot 3w\right)-\left(\left(e^{3w}-1\right)\cdot 3\right)}{9w^2}\bigg|_{w=0}=\frac{3\left(3we^{3w}\right)-\left(\left(e^{3w}-1\right)\right)}{9w^2}\bigg|_{w=0}=\frac{(3w-1)e^{3w}+1}{3w^2}\bigg|_{w=0}=\frac{0}{0}$$

Se obtiene una indeterminación por lo que se ha de aplicar la regla de L'Hôpital. En este caso, se ha aplicado la regla dos veces para poder lograr la media.

$$\alpha_1=\frac{(27w+9)e^{3w}}{6}\bigg|_{w=0}=\frac{9}{6}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

5. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función característica:

$$\Psi(t) = k + mt + pt^2$$

a) Logre los valores de k, m y p, para que la media de la variable aleatoria X sea 1 y su varianza 4.

b) Logre la función característica de la variable aleatoria $2X$.

c) Logre la función característica de la variable aleatoria $Y = 3X + 2$.

a)

Dado que el momento de orden cero tiene el valor de 1:

$$\Psi(0) = k + m0 + p0^2 = k$$

$$\boxed{k = 1}$$

La media es el momento de primer orden respecto al origen, por lo que:

$$\alpha_1 = \frac{1}{i}\frac{d\Psi(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{i}(m + 2pt)\big|_{t=0} = \frac{m}{i}$$

Dado que el valor de la media es 1:

$$\frac{m}{i} = 1;\ \boxed{m = i}$$

La varianza es el momento de orden dos respecto a la media, por lo que:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2\Psi(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} - 1^2 = -1(2p)\big|_{t=0} - 1 = -2p - 1$$

Dado que el valor de la varianza es 4:

$$-2p - 1 = 4;\ \boxed{p = -\frac{5}{2}}$$

b)

$$\Psi_{2X}(t) = E\left(e^{it2x}\right) = 1 + i(2t) - \frac{5}{2}(2t)^2 = \boxed{1 + 2it - 10t^2}$$

c)

$$\Psi_Y(t) = E\left(e^{ity}\right) = E\left(e^{it(3x+2)}\right) = E\left(e^{it3x} \cdot e^{2it}\right) = e^{2it} \cdot \left(1 + i(3t) - \frac{5}{2}(3t)^2\right) = \boxed{e^{2it} \cdot \left(1 + 3it - \frac{45}{2}t^2\right)}$$