FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA UNIDMENSIONAL

TEMA 2

Xabier Erdocia
Itsaso Leceta

OBJETIVOS

- ✓ Definir las funciones de probabilidad, densidad y distribución de una variable aleatoria unidimensional e identificar las diferencias entre ellas
- ✓ Comprender el concepto de función característica de una variable aleatoria unidimensional y ser capaz de calcular diferentes momentos a partir de ella
- ✓ Comprender el concepto de función generadora de momentos de una variable aleatoria y ser capaz de calcular diferentes momentos a partir de ella

ÍNDICE

eman ta zabal zazu

UPV EHU

2.1. Función de probabilidad

I. Definición

- Sea X una variable aleatoria discreta. La función de probabilidad (o masa), $p(x)$, de X se define como:

$$\begin{aligned} p: \ \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\to p(x) = P(X = x) \end{aligned}$$

- Del mismo modo el espacio muestral (S_x) sobre la que está definida la variable aleatoria discreta se define como:

$$S_x = \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$$

- La función de probabilidad, $p(x)$, asigna a cada punto del espacio muestral, S_x, su probabilidad y será 0 para todo punto externo a dicho espacio.

II. Propiedades

1. $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

3. Sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces $P(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$

2.2. Función de densidad

I. Definición

- Sea X una variable aleatoria continua. La función de densidad, $f(x)$, de X se define como:

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ siendo } a < b.$$

- Del mismo modo el espacio muestral (S_x) sobre la que está definida la variable aleatoria continua se define como:

$$S_x = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$

- La probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome un valor concreto es 0, esto es, $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

II. Propiedades

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. Sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces $P(A) = \int_A f(x)dx$

2.3. Función de distribución

I. Definición

- Sea X una variable aleatoria. La función de distribución, $F(x)$, de X se define como:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

- Aunque la definición sea la misma, su cálculo depende de la naturaleza (discreta o continua) de la variable aleatoria.

- **En el caso discreto**: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

I. Definición

- El los casos discretos, la función de probabilidad se puede obtener de la siguiente forma a partir de la función de distribución:

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

- **En el caso continuo:** $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f}(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- En los casos continuos, la función de densidad se puede obtener de la siguiente forma a partir de la función de distribución:

$$\mathrm{f}(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

II. Propiedades

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

3. La función de distribución es no-decreciente:

$$F(x_1) \le F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;\; x_1 < x_2$$

4. La función de distribución es continua por la derecha.

2.4. Función característica

I. Definición

- Sea X una variable aleatoria y "t" un parámetro real. La función característica de la variable aleatoria X se designa con el símbolo $\Psi(t)$. Es una función paramétrica y por definición tiene el siguiente aspecto:

$$\Psi(t) = E\left(e^{itx}\right)$$

Donde "e" es el número de Euler e "i" es la unidad imaginaria.

- Por lo tanto, empleando la fórmula de Euler, se logra la expresión trigonométrica de ese número complejo:

$$e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$$

I. Definición

- Si la variable aleatoria es continua, siendo $\mathrm{f}(x)$ su función de densidad:

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \mathrm{f}(x)\, dx$$

- Si la variable aleatoria es discreta, siendo $p(x)$ su función de probabilidad:

$$\Psi(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{itx_j} \cdot p(x_j)$$

- Como puede observarse, la función característica en el caso de una variable aleatoria continua, es la transformada de Fourier de la función de densidad.

- De forma análoga, en el caso de una variable aleatoria discreta, la función característica puede obtenerse mediante el desarrollo en serie de Fourier de la función de probabilidad.

I. Definición

Teorema de unicidad

Sean las funciones de distribución $F(x)$ y $G(x)$, cuyas funciones características son $\mathrm{f}(t)$ y $\mathrm{g}(t)$ respectivamente. Supongamos que $\mathrm{f}(t)=\mathrm{g}(t)\quad \forall t\in\mathbb{R}$. Entonces, $F(x)=G(x)$ para todo x.

- Como consecuencia de este teorema, la función característica de una variable aleatoria define unívocamente su función de distribución. Esto es, todas las variables que tienen la misma función de distribución tienen la misma función característica y viceversa.

II. Propiedades

1. Cuando el parámetro tiene un valor nulo, esto es, cuando $t = 0$, la función característica toma el valor de 1.

$$\Psi(0) = E\left(e^{i0x}\right) = E\left(e^{0}\right) = E\left(1\right) = 1$$

2. Dado que la función característica es paramétrica, es continua para todo valor de t.

3. Cálculo de la función característica de una transformación lineal:

Sea $Y = aX + b$

donde X es una variable aleatoria cuya función característica es $\Psi_X(t)$.

$$\Psi_Y(t) = E\left(e^{ity}\right) = E\left(e^{it(ax+b)}\right) = E\left(e^{itax} \cdot e^{itb}\right)$$

II. Propiedades

Dado que e^{itb} es una constante, empleando las propiedades de la media:

$$E\left(e^{itax}\cdot e^{itb}\right)=e^{itb}E\left(e^{itax}\right)$$

Cuando la función característica de la variable X toma el valor de (ta), $E\left(e^{itax}\right)=\Psi_X(ta)$, entonces:

$$\boxed{\Psi_Y(t)=e^{itb}\cdot\Psi_X(ta)}$$

4. Cálculo de la función característica de la trasformación lineal entre variables independientes:

Sea $Z=aX+bY+c$

II. Propiedades

La función característica de la variable aleatoria Z:

$$\Psi_Z(t) = E\left(e^{itz}\right) = E\left(e^{it(ax+by+c)}\right) = E\left(e^{itax} \cdot e^{itby} \cdot e^{itc}\right)$$

Como X e Y son independientes,

$$\Psi_Z(t) = E\left(e^{itax}\right) \cdot E\left(e^{itby}\right) \cdot E\left(e^{itc}\right)$$

Dado que e^{itc} es una constante, $E\left(e^{itc}\right) = e^{itc}$, $E\left(e^{itax}\right) = \Psi_X(ta)$, esto es, cuando el parámetro de la función característica de la variable X tiene un valor de (ta).

Análogamente, $E\left(e^{itby}\right) = \Psi_Y(tb)$, esto es, cuando el parámetro de la función característica de la variable Y tiene un valor de (tb).

Por tanto:

II. Propiedades

$$\boxed{\Psi_Z(t) = e^{itc} \cdot \Psi_X(ta) \cdot \Psi_Y(tb)}$$

- Esta respuesta puede generalizarse para cualquier suma de variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\Psi_X(t) = \Psi_{X_1}(a_1 t) \cdot \Psi_{X_2}(a_2 t) \cdot \ldots \cdot \Psi_{X_n}(a_n t) = \prod_{j=1}^{n} \Psi_{X_i}(a_j t)$$

5. Cálculo de los momentos de una variable aleatoria mediante las derivadas de la función característica:

   - Primera derivada:

$$\Psi'(t) = \frac{dE(e^{itx})}{dt} = E\,\frac{de^{itx}}{dt} = E(e^{itx})ix$$

II. Propiedades

- Segunda derivada:

$$\Psi''(t) = \frac{dE(e^{itx})ix}{dt} = E\,\frac{de^{itx}ix}{dt} = E(e^{itx})(ix)^2$$

- En general, la *k*-ésima derivada:

$$\boxed{\Psi^{k)}(t) = \frac{dE(e^{itx})\left(ix\right)^{k-1}}{dt} = E\,\frac{d(e^{itx})\left(ix\right)^{k-1}}{dt} = E(e^{itx})(ix)^k}$$

- Cuando la primera derivada es evaluada en $t = 0$:

$$\left.\frac{d\Psi(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(e^{itx})ix\Big|_{t=0} = iE(x)$$

II. Propiedades

- En general:

$$\left.\frac{d\Psi^k(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = i^k E(x^k)$$

- Entonces,

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{i^k}\left.\frac{d\Psi^k(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(x^k)}$$

- La función característica es muy útil para el cálculo de momentos de cualquier orden.

2.5. Función generadora de momentos

eman ta zabal zazu

UPV EHU

I. Definición

- La función generadora de momentos se define como:

$$\alpha(w) = E\left(e^{wx}\right)$$

- Posee la misma apariencia que la función característica, pero al contrario que la anterior, la función generadora de momentos puede no existir.

- Para que la función generadora de momentos exista, $w \in (-a, a) \quad \forall a > 0$. De este modo la función generadora de momentos es derivable en $w = 0$.

- Sustituyendo el parámetro w por it se obtiene la función característica:

$$\Psi(t) = \alpha(it) = E\left(e^{itx}\right)$$

I. Definición

- Si la variable aleatoria es continua, siendo $f(x)$ su función de densidad :

$$\alpha(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{wx} \cdot f(x)\, dx$$

- Si la variable aleatoria es discreta, siendo $p(x)$ su función de probabilidad:

$$\alpha(w) = \sum_{j=1}^{n} e^{wx_j} \cdot p(x_j)$$

- Se cumple el teorema de unicidad. Todas las variables aleatorias que tengan la misma función de distribución tienen la misma función generadora de momentos y viceversa.

II. Propiedades

1. Cuando el parámetro tiene un valor nulo, esto es, cuando $w=0$, la función generadora de momentos toma el valor de 1.

$$\alpha(0)=E\left(e^{0x}\right)=E\left(e^{0}\right)=E\left(1\right)=1$$

2. Dado que la función generadora de momentos es paramétrica, es continua para todo valor de w.

3. Cálculo de la función generadora de momentos de una transformación lineal:

Sea $Y=aX+b$

donde X es una variable aleatoria cuya función generadora de momentos es $\alpha_{\mathrm{X}}(w)$.

$$\alpha_{\mathrm{Y}}(w)=E\left(e^{wy}\right)=E\left(e^{w(ax+b)}\right)=E\left(e^{wax}\cdot e^{wb}\right)$$

II. Propiedades

Dado que e^{wb} es una constante, empleando las propiedades de la media:

$$E\left(e^{wax}\cdot e^{wb}\right)=e^{wb}E\left(e^{wax}\right)$$

Cuando la función generadora de momentos de la variable X toma el valor de (wa), $E\left(e^{wax}\right)=\alpha_X(wa)$, entonces:

$$\boxed{\alpha_Y(a)=e^{wb}\cdot\alpha_X(wa)}$$

4. Cálculo de la función generadora de momentos de la trasformación lineal entre variables independientes:

Sea $Z=aX+bY+c$

II. Propiedades

La función generadora de momentos de la variable aleatoria Z:

$$\alpha_Z(w) = E\left(e^{wz}\right) = E\left(e^{w(ax+by+c)}\right) = E\left(e^{wax} \cdot e^{wby} \cdot e^{wc}\right)$$

Como X e Y son independientes,

$$\alpha_Z(w) = E\left(e^{wax}\right) \cdot E\left(e^{wby}\right) \cdot E\left(e^{wc}\right)$$

Dado que e^{wc} es una constante, $E\left(e^{wc}\right) = e^{wc}$, $E\left(e^{wax}\right) = \alpha_X(wa)$, esto es, cuando el parámetro de la función generadora de momentos de la variable X tiene un valor de (wa).

Análogamente, $E\left(e^{wby}\right) = \alpha_Y(wb)$, esto es, cuando el parámetro de la función generadora de momentos de la variable Y tiene un valor de (wb). Por tanto:

II. Propiedades

$$\boxed{\alpha_Z(w) = e^{wc} \cdot \alpha_X(wa) \cdot \alpha_Y(wb)}$$

- Esta respuesta puede generalizarse para cualquier suma de variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\alpha(w) = \alpha_{x_1}(a_1 w) + \alpha_{x_2}(a_2 w) + \ldots + \alpha_{x_n}(a_n w) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{x_i}(a_i w)$$

5. Cálculo de los momentos de una variable aleatoria mediante las derivadas de la función generadora de momentos:

   - Primera derivada:

$$\alpha(t) = \frac{dE(e^{wx})}{dw} = E\frac{de^{wx}}{dw} = E(e^{wx})x$$

II. Propiedades

- Segunda derivada:

$$\alpha''(w) = \frac{dE(e^{wx})x}{dw} = E\frac{de^{wx}x}{dw} = E(e^{wx})x^2$$

- En general, la k-ésima derivada :

$$\boxed{\alpha^{k)}(w) = \frac{dE(e^{wx})x^{k-1}}{dw} = E\frac{d(e^{wx})x^{k-1}}{dw} = E(e^{wx})x^k}$$

- Si la primera derivada es evaluada en $w=0$, se obtiene el momento de primer orden:

$$\left.\frac{d\alpha(w)}{dw}\right|_{w=0} = E(e^{wx})x\Big|_{w=0} = E(x) \quad \text{Momento de primer orden}$$

II. Propiedades

- En general, para obtener el momento de orden *k*:

$$\boxed{\left.\frac{d\alpha^{k}(w)}{dt^{k}}\right|_{w=0} = E(e^{wx})x^{k}\Big|_{w=0} = E(x^{k})}$$