3. Gaia: Kardinalak eta konbinatoria

Probabilitateen teorian, eta matematikan oro har, kontatzen jakitea garrantzitsua da. Erreza eman dezake hasiera batean, baina batzuetan oso zaila gerta daiteke multzo baten elementu kopurua zein den ezagutzea. Multzo hori izan daiteke dado bat jaurtitzerakoan irteera posibleen multzoa, multzo batetik bestera defini daitezkeen funtzio ezberdinen kopurua, zenbaki bat errepikaturik zifra kopuru jakin bat duten zenbakien kopurua, etab.

Horrelako problemez arduratzen den matematikaren alorrari konbinatoria esaten zaio. Konbinatoriaren oinarriak ezagutu aurretik, baina, multzo baten elementu kopurua definitu behar dugu. Intuizioak esaten diguna izango da multzo finituen kasuan, baina definizio on bat eman beharko dugu horretarako. Multzo infinituen kasuan ere definizio antzerakoan oinarrituko gara, eta ikusiko dugu intuizioak orduan ez duela horren ondo funtzionatzen beti.

3.1 Kardinalak

Esan bezala, multzo batek zenbat elementu dituen definitu behar dugu, eta definizioa funtzio bijektiboen kontzeptuaren laguntzaz emango dugu. Izan ere, bi multzoren arteko bijekzio bat eraikitzeko multzo bat eta besteko elementuak banan-banan erlazionatzeko gai izan behar dugu, eta zentzua du pentsatzeak hori egiteko gaitasuna izango dugula baldin eta soilik baldin multzoek elementu kopuru bera badaukate. Beraz, ondoko definizioa emango dugu.

Definizioa 3.1.1. Izan bitez A eta B bi multzo. Orduan, bi multzoak *ekipotenteak* direla diogu baldin eta existitzen bada A-tik B-rako bijekzio bat.

Proposizioa 3.1.2. *Ekipotente izatea baliokidetasun erlazioa da multzoen gainean.*

Froga. Erreflexiboa dela argi dago, izan ere Id_A bada A-tik A-rako funtzio bijektibo bat. Simetrikoa ere bada, $f : A \to B$ bijektiboa existitzen bada, $f^{-1} : B \to A$, f-ren alderantzizkoa ere bijektiboa delako. Azkenik, A eta B ekipotenteak badira eta B eta C ere bai, existitzen dira $f : A \to B$ eta $g : B \to C$ bijekzioak, eta $g \circ f$ bada A-tik C-rako bijekzio bat. Beraz, A eta C ekipotenteak dira, eta erlazio trantsitibo bat da. □

Ondorengo urratsa multzo finitu eta infinituak bereiztea izango da.

Definizioa 3.1.3. A multzoa *finitua* dela esango dugu $A = \emptyset$ bada edo existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ zeinentzako A multzoa eta $\{1, \ldots, n\}$ multzoa ekipotenteak diren. Multzo hutsaren kardinala 0 dela diogu, eta bestelako kasuan, n horri A-ren *kardinala* esaten zaio, eta $|A| = \mathrm{Card}(A) = n$ gisa adieraziko dugu.

A multzo *infinitua* dela diogu bere azpimultzo propio batekin ekipotentea bada. Hau da, $B \subsetneq A$ existitzen bada zeinentzako $f : B \to A$ bijektibo bat aurki dezakegun.

Adibideak 3.1.4. (i) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ multzoa finitua da, eta bere kardinala 4 da.

(ii) $B = \{n \in \{1, \ldots, 100\} \mid n \text{ bikoitia }\}$ multzo finitua da eta 50 elementu dauzka. Definitu zein den hori frogatzen duen bijekzio bat.

(iii) $\mathbb{N}$ zenbaki naturalen multzoa infinitua da, izan ere $f : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defini dezakegu $f(n) = n/2$ bijektiboa dena.

Oharra 3.1.5. Ohartu kardinala ondo definituta dagoela. Izan ere, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzak baliokidetasun klase bat ordezkatzen du. Hain zuzen ere, n kardinala duten multzoek osatzen duten baliokidetasun klasea. Orduan $n \neq m$ bada bi klaseen ebakidura hutsa da. Hau da, ez dago multzo finiturik bi kardinal desberdin dauzkanik.

Ariketa 3.i. Frogatu ez dela existitzen $\{1, \ldots, n\}$-tik $\{1, \ldots, m\}$-rako aplikazio bijektiborik $n \neq m$ bada. (Laguntza: ikusi $n < m$ bada eta $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ injektiboa, f ezin dela supraiektiboa izan. Eta alderantziz, $n > m$ bada eta f supraiektiboa bada ez dela injektiboa izango.)

Beraz, multzo finituen kasuan aplikazio injektibo eta supraiektiboak definitzeko oztopo edo baldintzak ezartzen ditu multzo baten kardinalak.

Proposizioa 3.1.6. *Izan bitez A eta B bi multzo finitu. Orduan*

(i) $|A| \leq |B|$ *baldin eta soilik baldin existitzen bada* $f : A \to B$ *aplikazio injektibo bat,*

(ii) $|A| \geq |B|$ *baldin eta soilik baldin existitzen bada* $f : A \to B$ *aplikazio supraiektibo bat,*

(iii) $|A| = |B|$ *baldin eta soilik baldin existitzen bada* $f : A \to B$ *aplikazio bijektibo bat.*

Ariketa 3.ii. Eman aurreko proposizioaren froga. Multzo infinituen artean ere konparatu nahi izango dugu nolabait “elementu kopurua”. Kasu honetan ez da kopuruari buruz daukagun kontzeptu intuitiboa izango.

Definizioa 3.1.7. Multzo bat *zenbakigarria* dela diogu $\mathbb{N}$-rekin ekipotentea bada. Multzo bat *kontagarria* dela diogu finitua edo zenbakigarria bada.

Proposizioa 3.1.8. *$\mathbb{N}$-ren azpimultzoak finituak edo zenbakigarriak dira.*

Froga. $A = \emptyset$ bada, finitua da. Suposa dezagun, orain A $\mathbb{N}$-ren azpimultzo ez-hutsa dela. A ez hutsa izateagatik, existitzen da A-n $\mathbb{N}$-ren ordenarekiko txikiena den elementu bat, demagun n_1. Orain $A \setminus \{n_1\}$ multzoak ez hutsa izaten jarraitzen badu, hor ere aurki dezakegu n_2, elementuen arteko txikiena. Modu horretan jarraituz, $n_1, \dots, n_k$ definituta baditugu, $n_{k+1} = \min A \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ izango da multzo ez-huts bat daukagun bitartean.

Bi aukera dauzkagu. Izan liteke $k+1$. urratsean multzo hutsa lortzea. Orduan, $A = \{n_1, \dots, n_k\}$ izango da eta A-tik $\{1, 2, \dots, k\}$ multzora bijekzio bat defini dezakegu n_j j-ra bidaliz, $j = 1, \dots, k$ bakoitzerako. Kasu horretan A finitua izango da. Ez bada inoiz multzo hutsa lortzen, aplikazio bera $\mathbb{N}$ eta A-ren arteko bijekzioa izango da, eta beraz, A zenbakigarria dela lortuko dugu. □

Ikus ditzagun kardinalaren pare bat propietate erabilgarri egingo zaizkigunak.

Teorema 3.1.9. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zenbakigarria da.*

Froga. Antola ditzagun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-ko elementuak modu honetan:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Lerro diagonaletan dauden elementuen koordenatuak batura bera dute: $(1,2)$ eta $(2,1)$; $(1,3)$, $(2,2)$ eta $(3,1)$; eta abar. Batura txikienetik handienera ordena ditzakegu blokeka, bloke bakoitzean lehen koordenatua txikiena duenetik handienera. Honelako zerrenda osatuko genuke orduan:

$$(1,1)-(1,2)-(2,1)-(1,3)-(2,2)-(3,1)-(1,4)-(2,3)-(3,2)-(4,1)-(1,5)-\dots$$

Orain, zerrendako bakoitza zerrendan okupatzen duen posizioa ordezkatzen duen $\mathbb{N}$-ko zenbakira bidaltzen badugu, bijekzio bat lortzen dugu. Honek frogatuko luke $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zenbakigarria dela.

□

Proposizioa 3.1.10. *$\mathbb{Z}$ eta $\mathbb{Q}$ zenbakigarriak dira.*

Froga. (i) $\mathbb{Z}$-ren elementuak modu honetara ordena daitezke: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ Kasu honetan ere, beraz, bakoitza okupatzen duen posizioa ordezkatzen duen zenbakira bidaliz bijekzio bat lortuko dugu.

(ii) $\mathbb{Q}^+$ zenbaki arrazional positiboen multzoa hartzen badugu, $\frac{m}{n}$ bakoitza (m eta n elkarrekiko lehena izanik) (m, n) moduan ikus dezakegunez, $\mathbb{Q}^+$-etik $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-rako aplikazio injektibo bat lortzen dugu. Orduan $\mathbb{Q}^+$-en kopia bat dugu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ barruan, eta $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zenbakigarria denez, $\mathbb{Q}^+$ ere bai. Antzera argudia daiteke $\mathbb{Q}^-$-ekin, eta ondoren biak ordena ditzakegu $\mathbb{Z}$-koak ordenatu ditugun modu berean.

□

Ikus dezagun ondoren $\mathbb{R}$ zenbakigarria ez dela ikusteko baliagarri izango zaigun propietate bat.

Proposizioa 3.1.11. *Honako propietate hauek betetzen dira:*

(i) X kontagarria bada eta $A \subseteq X$, orduan A kontagarria da;

(ii) X ez bada kontagarria eta $X \subseteq Y$, orduan Y ez da kontagarria.

Froga. (i) X finitua bada eta $A \subseteq X$, A finitua da, eta kontagarria, beraz.

Orain X zenbakigarria bada, existitzen da $f\colon X \to \mathbb{N}$ bijekzio bat. Baina f funtzioa A-ra murrizten badugu $f : A \to f(A)$ bijektiboa izango da; eta $f(A) \subseteq \mathbb{N}$ denez kontagarria da; eta ondorioz A ere bai.

(ii) Aurreko atalaren kontrajarria da.

□

Teorema 3.1.12. *$\mathbb{R}$ ez da zenbakigarria.*

Froga. Nahikoa da frogatzen badugu $[0,1]$ ez dela zenbakigarria. Honetarako, *Cantorren argudio diagonala* delakoa erabiliko dugu. Demagun, absurdora eramanez, $[0,1]$ zenbakigarria dela, hau da, $[0,1]$ tartea eta $\mathbb{N}$-ren arteko bijekzio bat dugula. Orduan, $[0,1]$-eko zenbaki guztiak segida batean eman daitezke, demagun $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Adieraz ditzagun segida horretako elementuak beraien adierazpen hamartarraren bidez:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_1^1 a_1^2 a_1^3 \dots a_1^n \dots \\ x_2 &= 0.a_2^1 a_2^2 a_2^3 \dots a_2^n \dots \\ x_3 &= 0.a_3^1 a_3^2 a_3^3 \dots a_3^n \dots \\ &\dots \\ x_n &= 0.a_n^1 a_n^2 a_n^3 \dots a_n^n \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Absurdura iristeko, $[0,1]$ tartean dagoen baina segida honetan ez dagoen elementu bat eraiki nahi dugu. Izan ere, orduan ez genuke tarte osoa izango segida horretan. Horretarako idatz dezagun $y = 0.b_1b_2b_3\dots b_n\dots$, non $b_k = 1$ den, $a_k^k \neq 1$ bada, eta $b_k = 2$, $a_k^k = 1$ bada. Zenbaki erreal hori, definitu dugun moduagatik, ez dago zerrendan. Izan ere, $y \neq x_k$, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako, x_k-ren k-garren zifra dezimala eta y-rena desberdinak direlako; eta lortu dugu bilatzen genuen kontraesana. □

Lehen multzo finituen kardinala definitu dugu multzoaren elementu-kopurua bezala. Multzo infinituetarako ere kardinalak defini daitezke. Baina kasu honetan, ez da nahikoa izango kardinala infinitu dela esatea, izan ere, ikusi dugu $\mathbb{N}$ eta $\mathbb{R}$ biak direla infinituak, baina ez direla ekipotenteak. Zenbaki arrunten kardinala $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ idazten da eta *aleph* esaten zaio. $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = c$ idatzi ohi da, eta *continum-aren kardinala* deritzo. Lehen ikusi dugunaren arabera, $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

3.2 Konbinatoriako elementuak

Esan bezala, konbinatoria arduratzen da multzo finituen kardinalen inguruko propietate eta ezaugarriak aztertzeaz.

3.2.1 Printzipio batukorra eta biderkakorra

Printzipio batukorra deritzona ikusi dugu jada. Edo bai behintzat bere formarik sinpleenean. Izan ere, ondokoa dio.

Proposizioa 3.2.1 (Printzipio batukorra)**.** *Baldin $A_1, A_2, \dots, A_n$ multzo finituak binaka disjuntuak badira, orduan*

$$\mathrm{Card}\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_n).$$

Froga. Frogapena n-ren gaineko indukzioz egingo dugu. Baldin eta $n = 2$ bada, demagun $\mathrm{Card}(A_1) = n$ eta $\mathrm{Card}(A_2) = m$ dela . Orduan, $f : A_1 \to \{1, 2, \dots, n\}$ eta $g : A_2 \to \{1, 2, \dots, m\}$ bijekzioak existitzen dira. Bi horietan oinarrituz, ondoko aplikazioa defini dezakegu:

$$h : A_1 \cup A_2 \to \{1, 2, \dots, n+m\}, \text{ non } h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \text{ bada,} \\ g(x) + n, & x \in A_2 \text{ bada.} \end{cases}$$

Ondo definituta dago multzoak disjuntuak direlako, eta bistan da bijekzioa dela. Beraz, $\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2) = n + m$.

Demagun orain egia dela $n - 1 \geq 2$-rako eta ikus dezagun n-rako egia dela. Dei diezaiogun $B = A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ multzoari. Ohartu B eta A_n disjuntuak direla. Izan ere $B \cap A_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)$ multzo hutsa da, multzo hutsen bildura delako. Beraz, $n = 2$ kasua, frogatuta duguna, aplika dieziokegu B eta A_n-ri, eta $\mathrm{Card}(B \cup A_n) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(A_n)$ lortzen dugu. Baina indukzioagatik $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A_1) + \cdots + \mathrm{Card}(A_{n-1})$ denez, frogatuta geratzen da n. kasua. $\square$

Oharra 3.2.2. Multzoak binaka disjuntuak dira $A_i \cap A_j = \emptyset$ bada, $i \neq j$ guztietarako. Ez da gauza bera multzo guztien ebakidura hutsa izatea: $\bigcap_{1 \leq j \leq n} A_j = \emptyset$. Kontuz ibili horrekin. Adibidez $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{2, 3\}$ eta $A_3 = \{3, 4\}$-ren ebakidura osoa hutsa da, baina ez dira binaka disjuntuak, eta ez da egia beraien bilduraren kardinala 6 denik.

Nola erabil dezakegu hau konbinatoriako ariketa bat ebazteko? Demagun $i \in \{1, \dots, n\}$ bakoitzerako, A_i multzoa P_i propietatea betetzen duten elementuek osatzen duten multzoa dela. Orduan $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ bildura P_1 edo P_2, ... edo P_n betetzen duten elementuen multzoa da. Edo gauza bera dena, gutxienez horietako propietate bat betetzen duten elementuen multzoa. Propietateak binaka bateraezinak badira (hau da, ez badago elementurik bi propietate aldi berean betetzen dituena), orduan multzoak binaka disjuntuak izango dira. Kasu horretan, printzipio batukorra erabil daiteke gutxienez propietate bat betetzen duten elementuen kopurua kalkulatzeko. Izan ere, $\mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_n)$ izango da kopuru hori.

Adibidea 3.2.3. Lau txanpon botatzen ditugu. Zenbat era desberdin daude gutxienez bi aurpegi lortzeko?

Izan bedi A 2, 3 edo 4 aurpegi dituzten jaurtiketen multzoa. Idatz dezagun multzo hau hiru multzo disjunturen bildura bezala:

$$\begin{aligned} A_2 =& \{\text{jaurtiketak non zehazki bi aurpegi lortzen diren}\} \\ =& \{(a, a, g, g), (a, g, a, g), (a, g, g, a), (g, a, a, g), (g, a, g, a), (g, g, a, a)\}, \\ A_3 =& \{\text{jaurtiketak non zehazki hiru aurpegi lortzen diren}\} \\ =& \{(a, a, a, g), (a, a, g, a), (a, g, a, a), (g, a, a, a)\}, \\ A_4 =& \{\text{jaurtiketak non zehazki lau aurpegi lortzen diren}\} \\ =& \{(a, a, a, a)\}. \end{aligned}$$

Orduan $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A_2)+\mathrm{Card}(A_3)+\mathrm{Card}(A_4) = 6+4+1 = 11$. Hau da, 11 modu desberdin daude lau txanpon bota eta gutxienez bi aurpegi lortzeko.

Kontuz ibili behar da orokorrean, formula hau soilik baita egia multzoak binaka disjuntuak direnean. Orokorrean hau da bi multzoren bilduraren kardinala kalkulatzeko daukagun modua:

Proposizioa 3.2.4 (Inklusio-esklusioaren printzipioa)**.** *A eta B multzo finituak badira,*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Froga. A eta B multzoak beste modu honetan idatz ditzakegu $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ eta $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Orain $A \setminus B$ eta $A \cap B$ multzo disjuntuak dira, eta beraz, aurreko proposizioa aplika diezaiokegu banaketa horri:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \setminus B) + \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Modu berean,

$$\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B \setminus A) + \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Orain, $\mathrm{Card}(A\cup B) = \mathrm{Card}(A\setminus B)+\mathrm{Card}(B\setminus A)+\mathrm{Card}(A\cap B)$ denez, printzipio batukorrak ematen du lortu nahi genuen formula. □

Adibidea 3.2.5. Zenbat zenbaki daude 1 eta 100 artean ez direnak ez 3-ren ez 7-ren multiploak?

Izan bitez $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$, $A = \{n \in X : n \text{ 3-ren multiploa}\}$ eta $B = \{n \in X : n \text{ 7-ren multiploa}\}$. Kalkulatu behar duguna, $\mathrm{Card}(X - (A \cup B))$ da, hau da, $100 - \mathrm{Card}(A \cup B)$.

$A = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$ denez, $\mathrm{Card}(A) = 33$ da. $B = \{7, 14, 21, \ldots, 98\}$ denez, $\mathrm{Card}(B) = 14$ da. Gainera, $n \in A \cap B$ bada, 21-en multiploa da. Orduan, $A \cap B = \{21, 42, 63, 84\}$ eta $\mathrm{Card}(A \cap B) = 4$. Hortaz,

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = 33 + 14 - 4 = 43.$$

Beraz, galderaren erantzuna $100 - 43 = 57$ da.

Hel diezaiogun orain printzipio biderkakorrari. Printzipio biderkakorra erabiltzen da zerrenda ordenatu baten aukera kopurua kalkulatzeko, dauzkagun datuak izanik zerrenda horren luzera eta leku bakoitzean koka dezagun elementu posibleen kopurua.

Adibide bat litzateke zenbat emaitza posible lor ditzakegun dado bat eta txanpon bat botata. Dadoak 6 aurpegi dauzka eta txanponak bi, baina emaitza posible kopurua ez da 8, 12 baizik! Hau da, biderkadurak ematen digu emaitza posibleen kopurua. Izan ere, benetan daukagun posibilitateen multzoa honakoa da $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dadoa botatzearen emaitza posibleak eta $T = \{a, g\}$. Nola bikote bakoitza posibilitate ezberdin bat den $D \times T$ multzoak deskribatzen dizkit posibilitate guztiak.

Proposizioa 3.2.6. *Izan bitez A eta B bi multzo finitu. Orduan*

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

Froga. Izan bitez A eta B bi multzo finitu. Hasteko bietako bat hutsa bada, biderkadura kartesiarra hutsa da eta kardinala zero da. Orain demagun $\mathrm{Card}(A) = n$ eta $\mathrm{Card}(B) = m$ direla. Orduan existitzen dira $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ eta $g : \{1, \ldots, m\} \to B$ bijektiboak. Zerrenda ditzagun beraz $f(i) = a_i$ eta $g(j) = b_j$ elementu ezberdinak. Badakigu

$$A \times B = \{a_1\} \times B \cup \cdots \cup \{a_n\} \times B$$

dugula, non bildurako multzo denak binaka disjuntuak diren. Orain, $g_i : \{a_i\} \times B \to B$ funtzioa $g_i(a_i, b) = g(b)$ esleitzen diona bijekzio bat da. Beraz, bildurako elementu bakoitzaren kardinala B-ren kardinalaren bera da, m. Eta n aldiz batzen ari garenez, $\mathrm{Card}(A \times B) = nm$ lortzen dugu. □

Aurreko kasuan bezala, bi multzoren (edo bi luzerako zerrendaren) kasua $r \in \mathbb{N}$ luzerakotara orokor dezakegu.

Proposizioa 3.2.7 (Printzipio biderkakorra)**.** *Baldin eta r luzerako zerrenda ordenatua osatu nahi badugu, non: zerrendaren lehen tokirako n_1 objekturen artean aukera daiteke, bigarrenerako n_2 objekturen artean eta, antzera, r-garren tokian n_r objektuen artean aukera daiteke. Orduan, zerrenda posible guztien kopurua $n_1 n_2 \ldots n_r$ da.*

Adibideak 3.2.8. (i) Adibide bat litzateke lau zifratako zenbat zenbaki osa ditzakegun zifra denak bakoitiak dituztenak. Ohartu kasu honetan zerrendaren luzera 4 litzatekeela eta leku bakoitzean jar dezakegun elementu kopurua 5 (izan ere, 5 zifra bakoiti daude: 1,3,5,7,9). Beraz, kasu honetan, 5^4 zenbaki izango genituzke.

(ii) Auto baten matrikula espainiar estatuan lau zenbakik eta hiru letrak osatzen dute, bokalik eta $\tilde{N}$-rik onartzen ez delarik. Zenbat matrikula posible daude guztira? Lehen hiru lekuetarako 10 aukera dauzkagu, beraz 10^4 eta azken hiru lekuetarako 21 letra dauzkagu aukeran. Beraz, guztira $10^4 21^3 = 92610000$ matrikula ezberdin osa daitezke.

3.2.2 Usategiaren printzipioa

Honako baieztapen ageriko honetan oinarritzen da usategiaren printzipioa izenez ezaguna dena, eta hortik datorkio izena: $m + 1$ *uso* m *habiatan kokatu nahi baditugu, gutxienez habia batean uso bat baino gehiago sartu beharko dugu.*

Proposizioa 3.2.9 (Usategiaren printzipioa)**.** *Izan bitez $m, n \in \mathbb{N}$. Orduan, m objektu n multzotan banatzen baditugu eta*

(i) $m > n$ bada, orduan gutxienez 2 objektu multzo berean daude (printzipio arrunta);

(ii) existitzen bada $k \in \mathbb{N}$ zeinetarako $m > kn$ den, orduan gutxienez $k + 1$ objektu multzo berean daude (printzipio orokortua).

Froga. Bertsio orokortua frogatuko dugu, arrunta bere kasu berezia delako $k = 1$ denean. Demagun absurdura eramanez multzo guztietan k objektu edo gutxiago daudela. Orduan, n multzo dauzkagunez gehienez kn objektu izango ditugu. Baina $m > kn$ baldin bada ezin izan ditugu m objektu guztiak kokatu. □

Oso naturala dirudien printzipio honek ezusteko emaitzak eman ditzake.

Adibidea 3.2.10. Zazpi senideko familia batean, gutxienez biren adinen batura edo kendura 10-en multiploa izan behar da.

Ondoko multzoa eraiki dezakegu:

$$A_{1,9} = \{\text{familia kidearen adina 1 edo 9 zifran bukatzen da}\}.$$

Modu berean defini ditzakegu $A_{2,8}$, $A_{3,7}$, $A_{4,6}$, A_5 eta A_0. Nola sei multzo dauzkagun eta zazpi adin, badakigu gutxienez multzoetako batean bi adin eroriko direla. Baldin eta bi adinak digitu berean amaitzen badira, orduan beraien kendura 10-en multiploa izango da. Aldiz, desberdinak badira, multzoak osatu ditugun moduagatik, adinen batura 10-en multiploa izango da.

Oharra 3.2.11. Multzoen kardinalak erabilita printzipio arrunta honen baliokidea da: $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$ bada, ez dago A-tik B-rainoko aplikazio injektiborik.

3.2.3 Aldakuntzak, permutazioak eta konbinazioak (errepikapenik gabe)

Atal honetan konbinatorian ohikoak diren zenbait problemari ekingo diogu.

- *Aukeraketa*: Multzo batetik elementu batzuk aukeratzeko zenbat modu ezberdin dauden jakitea izango da helburua. Aukeraketa horretan aukeratutako elementuen multzoak soilik du garrantzia, eta beraz, elementuak zein ordenetan aukeratu diren ez da garrantzitsua izango. *Adibidez: Denda batean 12 pizza mota badaude salgai, zenbat modu desberdinetan aukera ditzaket hiru pizza zati?*

- *Antolaketa*: Multzo batetik objektu batzuk aukeratu eta antolatzea eskatzen du. Hau da, hautatzeaz gain, gero multzokatu, ordenatu edo dena delako moduan antolatu beharko dira aukeratutako objektu horiek. *Adibidea: Ikasgela honetako ikasleak zenbat modu desberdinetan eser zaitezkete mahaietan?*

- *Banaketa*: Multzo bateko elementuak zenbat modu desberdinetan bana daitezke beste azpimultzo batzuetan? *Adibidea: 56 ikasle zenbat modu desberdinetan bana daitezke 4ko taldetan?*

Erantzuna desberdina izaten da bai aukeraketa bai antolaketaren kasuan errepikapenak onartzen direnaren arabera edo ez. Bigarren eta hirugarren adibideetan, kasu honetan, ez du zentzurik ikasleak errepikatzeak, baina lehen galderan posible da enuntziatuak esplizituki “hiru pizza zati desberdin” esatea. Alegia, kasu honetan debekatuta egongo litzateke pizza mota bereko bi edo hiru aukeratzea. Eta horrek eragina izango du azken emaitzan, beraz, horretan arreta jarri beharko dugu.

Aldakuntzak eta permutazioak

Hasteko n elementu dauzkan multzo batetik k aukeratu eta zenbat modu desberdinetan ordena ditzakegun ikusiko dugu.

Definizioa 3.2.12. Izan bedi A multzoa n elementu dauzkana eta $1 \leq k \leq n$. A multzotik k elementu aukeratu eta ordenatzeari k*-permutazio* edo aldakuntza esaten zaio. Beste era batera esanda $a_1, \ldots, a_k$ moduko segida ordenatu bat osatzea, $a_i \in A$ eta a_i guztiak desberdinak izanik.

Proposizioa 3.2.13. *Demagun n elementuko multzo batetik k elementu aukeratu eta ordenatzeko modu ezberdin guztien kopurua jakin nahi dugula. Kopuru hori $P(n,k)$ bidez adieraziko dugu eta honela kalkula daiteke:*

$$P(n,k) = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Froga. Printzipio biderkakorraren aplikazio zuzena da, lehen lekurako n aukera dauzkagu, bigarrenerako $n-1$, dagoeneko lehenengoa aukeratu dugulako, etab. k elementu aukeratzen ditugunean bukatuko dugu, eta orduan $n-k+1$ aukera izango ditugu. □

Oharra 3.2.14. Ohartu faktorialen notazioa erabiliz honela adieraz dezakegula n-ren gaineko k-permutazio kopurua

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Adibideak 3.2.15. (i) 5 zifratako zenbat zenbaki idatz daitezke $1, 2, 3, \ldots, 9$ zifrekin? Hasteko, zenbakiak badirenez zifren zerrenda ordenatuak, zifrak ordenatzen ari gara zenbaki posibleak sortzean. Lehen aukeran 9 aukeraren artean hautatu behar dugu. Bigarrenean 8 aukera geratuko zaizkigu, ezin dugulako zifra errepikatu. Hirugarrenean 7, laugarrenean 6 eta 5.ean 5. Guztira, $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ zenbaki ezberdin izango ditugu.

(ii) Baldin eta A eta B multzoen kardinalak k eta n badira hurrenez hurren, orduan A-tik B-rako aplikazio injektibo kopurua $P(n,k)$ da. Izan ere, A-ko elementu bakoitzarentzat irudi bana aukeratu behar dugu. Lehen elementuaren kasuan n aukera izango ditugu, baina aplikazioa injektiboa izatea nahi badugu, bigarren elementuarentzat ezin dugu lehen hautatutako elementua hartu. Hau da, $n-1$ aukera dauzkagu, etab.

Kasu berezia da denak aukeratu behar ditugunean. Hau da, benetan ez dugunean aukeratu beharrik, baizik eta ordenatu besterik ez.

Definizioa 3.2.16. Multzo batek n elementu badauzka, multzoko elementuak ordenatzeko modu bakoitzari *permutazio* esaten zaio.

Korolarioa 3.2.17. *Permutazio denen kopurua $P(n,n) = P(n) = n!$ da.*

Ohartu A eta B multzoak baditugu, $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = n$ izanik, A eta B-ren arteko aplikazio bijektiboen kopurua $P(n)$ dela.

Konbinazioak

Multzo batean n elementu batetik k zenbat modu desberdinetan aukeratu ditzakegun zenbatzen ahaleginduko gara orain, aukeratzen ditugun ordenaz kezkatu gabe.

Definizioa 3.2.18. Demagun n elementuko multzo bat dugula. Bertatik $k \leq n$ elementu aukeratzeko dauden moduei *konbinazio* esaten zaie.

Proposizioa 3.2.19. *n elementu dituen multzo batetik k aukeratzeko modu desberdin kopuruari n-multzo baten gaineko k-konbinazio esaten zaio eta konbinazio desberdin kopurua honela kalkulatzen da:*

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Froga. Ohartu n-multzo baten gaineko k-permutazioen emaitza lehenik k hautatu (hau $C(n,k)$ modutan egin daiteke) eta ondoren k elementu horiek ordenatzetik datorrela (horretarako $k!$ modu daude). Hau da, $P(n,k) = C(n,k)k!$ dela, eta hemendik zuzenean lortzen da goiko formula. $\square$

Konbinazio-zenbakiak. k eta $n \in \mathbb{N}$ badira eta $k \leq n$, k-naka hartutako n elementuko konbinazioen kopurua ematen duen zenbakia $\binom{n}{k}$ idazten da eta konbinazio-zenbakia deitzen da. Beraz,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Bistan denez, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Formula hau $k = 0$-rako ere bete dadin, $\binom{n}{0} = 1$ definitzen da.

Adibidea 3.2.20. Karta-sorta espainol batek 40 karta dauzka, lau palotan banatuta. Palo bakoitzak 10 karta desberdin ditu. Bakoitzari 4 karta hartuta zenbat modu daude:

(i) Bi bikote ezberdin tokatzeko?

(ii) Hirukote bat tokatzeko?

Lehenaren erantzuna kalkulatzeko, ohartu bi bikote ezberdin badira, bi zenbaki edo figura ezberdin izango ditugula. 10 karta mota daudenez, lehenik bi zenbaki/figurak aukertzeko zenbat modu dauden kalkulatuko dugu. Horiek $\binom{10}{2}$ izango dira. Orain, zenbaki/figura horiek lau palotan daude, beraz, paloak ere aukeratu beharko ditugu. Horretarako $\binom{4}{2}$ modu egongo dira. Bi bikoteetako paloak aukeratu behar ditugunez, bi aldiz biderkatu behar dugu $\binom{4}{2}$. Ondorioz, guztira

$$\binom{10}{2}\binom{4}{2}^2 = 1620$$

modu egongo dira bi bikote tokatzeko.

Bigarren galderaren kasuan, hirukotearen zenbakia aukeratzen hasiko gara. Horretarako $\binom{10}{1}$ modu daude. Bestetik, lau palotatik hiru dira agertuko direnak. Horiek aukeratzeko moduak $\binom{4}{3}$ dira. Azkenik, azken karta tokatuko zaigu. Horretarako aukeratu gabekoen artean 1 aukeratu beharko dugu. Hau da 37-tik bat. Ondorioz, azken emaitza:

$$\binom{10}{1}\binom{4}{3}\binom{37}{1} = 10 \cdot 4 \cdot 37 = 1480.$$

Guztira $\binom{40}{4}$ aukera daude 40 kartatik 4 tokatzeko. Hau da, 91390. Hau balia dezakegu bi bikote edo hirukote bat tokatzeko probabilitatea kalkulatzeko. Lehenaren kasuan 0.0177 izango da, eta bigarrenarenean 0.0161.

3.2.4 Aldakuntzak, permutazioak eta konbinazioak (errepikapenekin)

Orain arte ez dugu elementu bat behin baino gehiagotan aukeratua izateko aukera eman. Izan ere, multzo batean elementu bat badago edo ez dago, baina ez dugu "zenbat aldiz dago?" galdetzen. Nolabait esanda, multzo teoriaren ikuspegitik $\{a, a\} = \{a\}$ da. Hala ere, gustatuko litzaiguke aurreko problemak orokortzea hautatzen ditugun elementuak errepikatuta egon badaitezke ere. Hautatu arren multzora bueltatzeko aukera izango bagenu bezala. Hori egiteko, multi-multzo delakoak definitu behar ditugu:

Definizioa 3.2.21. Izan bitez $m_i \in \mathbb{N}$ $i = 1, \ldots, n$ eta $a_1, \ldots, a_n$ elementuak. Orduan multi-multzo bat multzo bat da a_i elementuaren m_i kopia dauzkana, eta $\{m_1 \cdot a_1, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ bidez adieraziko dugu.

Adibidea 3.2.22. Demagun okindegi batean 40 napolitana (N), 30 ogi barra (O) eta 47 donuts (D) daudela. Orduan okindegiko mostradorean dagoena multi-multzo honek adieraziko luke $\{40 \cdot N, 30 \cdot O, 47 \cdot D\}$. Multzo honek orain 40+30+47 elementu dauzka.

Errepikatuzko permutazioak

Zer gertatzen da errepikatzea posible den elementuak ordenatu nahi ditugunean? Elementuak errepikatuta egotearren, gerta liteke nik elementu beraren kopia desberdinak hautatuta orden berdin bat lortzea. Hau da, nik lehenik ogi bat, gero donuts bat eta gero berriz ogi bat hartu eta ordenean kokatzen baditut, ODO segida lortuko dut. Baina kasu honetan berdin dit O-ren zein kopia atera dudan hasieran eta zein gero.

Definizioa 3.2.23. Izan bedi $A = \{m_1 \cdot a_1, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ multi-multzo bat. Multzoaren elementu kopurua $m = m_1 + \cdots + m_n$ da. Elementu horien guztien ordenazioak *errepikatuzko permutazioak* dira.

Adibidea 3.2.24. a hiru aldiz eta b bi aldiz erabilita, permutazio hauek egin daitezke:

$$aaabb,\ aabab,\ aabba,\ abaab,\ ababa,\ abbaa,\ baaab,\ baaba,\ babaa,\ bbaaa.$$

Propietateak 3.2.25. *Izan bedi $A = \{m_1 \cdot a_1, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ multi-multzoa eta $m = m_1 + \cdots + m_n$. Errepikatuzko permutazioen kopurua hau da:*

$$PR(m; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \binom{m}{m_1; \ldots; m_n} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!}.$$

Froga. Guztira m luzera izango du ordenatuko dugun segidak. Lehenik demagun a_1 elementuak segidan hartuko dituen lekuak aukeratzen ditugula. Hori $\binom{m}{m_1}$ modu ezberdinetan egin dezakegu. Orain a_2-ak kokatu behar ditugu, eta $m - m_1$ leku dauzkagu m_2 a_2-ak kokatzeko. Prozesu horrekin segiz, ondoko biderkadura lortzen dugu:

$$\binom{m}{m_1}\binom{m-m_1}{m_2}\binom{m-m_1-m_2}{m_3}\cdots\binom{m-m_1-\cdots-m_{n-1}}{m_n} =$$

$$\frac{m!}{m_1!(m-m_1)!}\cdot\frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!}\cdots\frac{(m-m_1-\cdots-m_{n-1})!}{m_n!(m-m_1-\cdots-m_n)!} =$$

$$\frac{m!}{m_1!\dots m_n!}.$$

□

Adibidea 3.2.26. Aurreko adibidean a 3 aldiz eta b bi aldiz erabilita osa daitezkeen hitz kopurua $\binom{5}{2;3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ da.

Oharra 3.2.27. Zenbaki honi *koefiziente multinomial* esaten zaio eta lotura du $\binom{m}{m_1;\dots;m_n}$ notazioa erabiltzearekin. Izan ere $(x_1+\cdots+x_n)^m$ egiterakoan $x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}$-ren koefizientea hain justu $\binom{m}{m_1;\dots;m_n}$ zenbakia da. Berehala ikusiko dugun Newtonen binomioa orokortzen du horrek, eta hortik multinomiak izena.

Errepikatuzko konbinazio edo multi-aukerak

Ikus dezagun azkenik zer gertatzen den aukeraketen kasuan errepikapenak baimentzen ditugunean. Kasu honetan, nolabait, hautatu dugun elementua berriz multzora buelta dezakegu. Alegia, elementu horren infinitu kopia izango bagenitu bezala ulertzen dugu multzoa.

Proposizioa 3.2.28. *Izan bedi $CR(n,k) = \left(\binom{n}{k}\right)$ n elementu ezberdineko multimultzo batetik k aukeratzeko modu ezberdin kopurua. Orduan*

$$CR(n,k) = \left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Froga. Ordenak garrantzirik ez duenez,

$$a_1\overbrace{\cdots}^{k_1}a_1, a_2\overbrace{\cdots}^{k_2}a_2, \dots, a_n\overbrace{\cdots}^{k_n}a_n,$$

erako zerrendak eraiki behar dira, non k_i zenbakiak a_i elementuak zenbat aldiz agertu behar duen adierazten duen, $i \in \{1,\dots,n\}$ bakoitzerako, $k_1+\cdots+k_n = k$ delarik. Baliteke elementu batzuk ez agertzea. Horrela uler daiteke egin behar duguna: elementuak ordena jakin batean kokatuta eta berdinak elkarren alboan ipinita, pentsa dezagun "bereizle" bat kokatzen dugula elementua aldatzen den bakoitzean; $n-1$ bereizle behar ditugu. Idatz dezagun b bereizle baterako. Orduan,

$$a_1\overbrace{\cdots}^{k_1}a_1, b, a_2\overbrace{\cdots}^{k_2}a_2, b, \dots, b, a_n\overbrace{\cdots}^{k_n}a_n$$

erako kateak egin behar ditugu. (Bereizle bi jarraian badatoz $\dots, b, b, \dots$, ez da bitartean zegokien a_j elementua hartzen.) Hau da, $k+n-1$-eko zerrenda batean $n-1$ toki aukeratu behar ditugu, nahikoa delako bereizleei lekua esleitzea. Hori $C(k+n-1,n-1) = C(n+k-1,k)$ modutan egin ahal da. □

Adibidea 3.2.29. Demagun $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ ekuazioa dugula eta jakin nahi dugula zenbat soluzio ezberdin dituen $x_i \in \mathbb{Z}$ eta $x_i \geq 0$ izanik $i = 1, 2, 3, 4$-rako.

Ohartu zenbaki bakoitza $x_i = 1 + \overset{m_i}{+} 1$ moduan idatz dezakegula $m_i \in \mathbb{N}_0$ izanik. Orduan, $10 = 1 + \cdots + 1$ lortzeko dauzkagun moduak, 3 bereizle jarrita lortuko ditugu; non bereizle bakoitzak adieraziko digun zein balio hartzen duten x_i-ek. Adibidez, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 4$ soluzioa ondoko konfigurazioak emango liguke

$$11b111b1b1111.$$

Ondorioz, 10 bateko eta 3 bereizle dauzkagu, hau da, 13 leku. Horietatik 3 lekutan kokatu nahi ditugu bereizleak konfigurazio ezberdin denak lortzeko. Hori egiteko, guztira $\binom{13}{3} = 286$ soluzio dauzkagu.

3.3 Pascalen triangelua eta Newtonen binomioa

Konbinazio-zenbakien propietateak kontuan hartuta, modu berezi batean antola daitezke. Horri Pascalen triangelua (edo Tartagliaren triangelua) deritzo.

Proposizioa 3.3.1 (Pascalen formula)**.** *Izan bitez* $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$. *Orduan,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Froga. Faktorialen bidezko formulak erabiliz, berehala lortzen da. Arrazoitzeko beste modu bat hau da. n elementuko multzo batetik k elementuko azpimultzoak zenbatu behar ditugu. Bereizi elementu bat. Elementu hori ez duten azpimultzoak $n-1$ elementuren artean aukeratzen dira, beraz, $\binom{n-1}{k}$ ditugu denetara. Bereizitako elementua agertzeko, beste $n-1$ elementuren artean $k-1$ elementuko azpimultzoak hartu behar dira eta horiek $\binom{n-1}{k-1}$ dira. $\square$

Definizioa 3.3.2 (Pascalen triangelua)**.** Konbinazio-zenbakiek osatzen duten triangelu infinitu honi *Pascalen triangelua* deritzo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{0} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Horrela kokatuta, *Pascalen formulak* dio konbinazio-zenbaki bakoitza gainean dituen bien batura dela. Izan ere, $\binom{n}{k}$ zenbakiaren gainekoak $\binom{n-1}{k-1}$ eta $\binom{n-1}{k}$ dira. Hau kontuan izanda, n-rako konbinazio-zenbakiak ezagututa $k = 0, 1, \ldots, n$ balioetarako, $(n+1)$-erako idatzen dira.

Konbinazio-zenbakien balioak triangeluan ordezkatuz, honela geratzen da:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 2 && 1 && \\ & 1 && 3 && 3 && 1 & \\ 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \\ &&&& \vdots &&&& \end{array}$$

Teorema 3.3.3 (Newtonen binomioaren teorema)**.** *$n \in \mathbb{N}$ guztietarako,*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

Froga. Ohartu $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ dela, guztira n faktoreren biderkadura. Garatzerakoan, bakoitzetik a edo b aukeratu eta aukeratu ditugun n biderkagaiak elkarrekin biderkatu ditugu. Hori egin dezakegun modu bakoitzak batugai bat ematen digu. Lortzen diren gaiak $a^{n-k}b^k$ erakoak dira, beraz, (k alditan b eta $n-k$ alditan a aukeratuta). Biderkagai horren koefizientea zein izango den jakiteko, kalkulatu behar duguna da zenbat modu ezberdinetan aukeratu ahal izan ditugun k biderkagaitan b eta $n-k$ biderkagaitan a. Ohartu, benetan b-ak aukeratzeko moduak zenbatzea aski dela, horietako bakoitzean $n-k$ a aukeratzen ditugulako derrigor. Baina badakigu n lekutatik k aukeratzeko moduak konbinazioak direla, beraz, $\binom{n}{k}$ da $a^{n-k}b^k$-ren koefizientea. $\square$

Ariketa 3.iii. Indukzioz eta Pascalen formula erabiliz ere froga daiteke aurreko teorema. Saiatu egiten.

Korolarioa 3.3.4. *$n \geq 0$ guztietarako,*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Froga. Newtonen binomioaren formulan $a = b = 1$ hartuz lortzen da. $\square$

Honek frogatzen du n elementuko multzo bat badugu, demagun A; orduan bere parteen multzoaren kardinala 2^n dela; hau da $\mathcal{P}(A) = 2^{\text{Card}(A)}$. Izan ere, ohartu zehazki k elementu duten azpimultzo kopurua $\binom{n}{k}$ dela.