

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Autoevaluación

OCW 2020: *Parametrización y representación gráfica de superficies construidas*

Tema 5. Ejercicios propuestos resueltos

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Barrallo Calonge, Javier

Soto Merino, Juan Carlos

Lecubarri Alonso, Inmaculada

Departamento de Matemática Aplicada

Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB/BIE)

ETS de Arquitectura de Donostia-San Sebastián (ETSASS/DAGET)



EJERCICIOS DEL TEMA 5. SUPERFICIES REGLADAS EN ARQUITECTURA

Ejercicio nº1

Enunciado

El genial arquitecto Antoni Gaudí dedicó sus últimos años casi exclusivamente al seguimiento de la construcción de la Sagrada Familia en Barcelona. Religioso como era, quiso que los hijos e hijas de los trabajadores del templo tuvieran una educación plenamente católica. Para ellos construyó en 1909, junto a las obras del edificio, una pequeña escuela hoy reconvertida en museo.



Imagen 1. Escuelas de la Sagrada Familia en 1909, Barcelona

La fotografía de la imagen 1 es de autor desconocido y de dominio público.

Este pequeño edificio constituye una de las mejores expresiones de la arquitectura orgánica con un perfecto equilibrio entre la función y la forma, la estructura y la estética. Destaca la cubierta del edificio, formada por un conoide en la que se alternan sinuosas formas cóncavas y convexas copiadas por numerosos arquitectos.

Parametrice una cubierta conoidal semejante a la de las Escuelas de la Sagrada Familia. Se considera una planta rectangular de 24 metros de largo y 12 metros de ancho elevada a 6 metros de altura formada a partir de las curvas de las funciones $\cos(t)$ y $\cos(t+\pi)$ que recorren las aristas longitudinales del edificio.

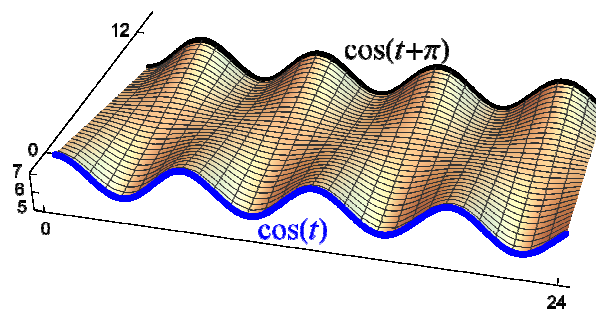


Imagen 2. Cubierta conoidal pedida (imagen propia)

Resolución

Remove["Global`*"]

- Se trata de obtener una superficie conoide con las medidas dadas
- Las generatrices se apoyan en dos curvas de funciones trigonométricas, $\cos(t)$ y $\cos(t+\pi)$, cuyo parámetro está desplazado π rad

Out[287]=

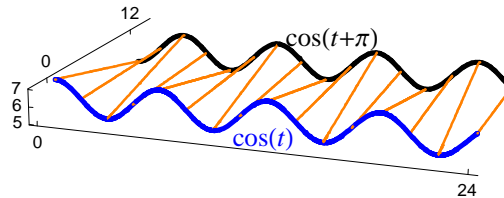


Imagen 3. Generatrices de la superficie conoidal (imagen propia)

- Parametrización de las curvas trigonométricas con las especificaciones dadas
 - función $\cos(t)$

$$C_1 \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 6 + \cos(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 24] \subset \mathbb{R}$$

{x1 = t, y1 = 0, z1 = 6 + Cos[t]};

- función $\cos(t+\pi)$

$$C_2 \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = 12 \\ z_1 = 6 + \cos(t+\pi) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 24] \subset \mathbb{R}$$

{x2 = t, y2 = 12, z2 = 6 + Cos[t + Pi]};

- Parametrización de la superficie conoidal aplicando la técnica de extrusión

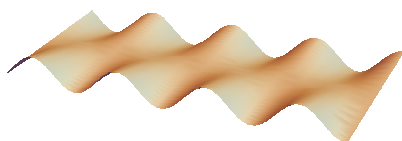
{xp = u x1 - (u - 1) x2, yp = u y1 - (u - 1) y2, zp = u z1 - (u - 1) z2}

{-t (-1 + u) + t u, -12 (-1 + u), -(-1 + u) (6 - Cos[t]) + u (6 + Cos[t])}

$$S \equiv \begin{cases} x_1 = -t(-1 + u) + t \cdot u \\ y_1 = -12(-1 + u) \\ z_1 = (1 - u) \cdot [6 - \cos(t)] + u \cdot [6 + \cos(t)] \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall t \in [0, 24] \\ \forall u \in [0, 1] \end{matrix}$$

- Representación gráfica de la superficie

cub1 = ParametricPlot3D[{xp, yp, zp}, {t, 0, 24}, {u, 0, 1}, Mesh -> None, Boxed -> False, Axes -> False, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 20]]]



■ Ecuación cartesiana

`Eliminate[{x == xp, y == yp, z == zp}, {t, u}]`

⋮ **Eliminate:** Inverse functions are being used by Eliminate, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

$$-\text{ArcCos}\left[\frac{6(-6+z)}{6-y}\right] = x \quad || \quad \text{ArcCos}\left[\frac{6(-6+z)}{6-y}\right] = x$$

$$S \equiv F(x, y, z) = \arccos\left(\frac{6(z-6)}{6-y}\right) - x = 0$$

Ejercicio nº2

Enunciado

Para diseñar el *Business Promotion Centre* en la ciudad alemana de Duisburg, el arquitecto británico Norman Foster recurrió a un diseño simplista pero visualmente impactante empleando dos únicas fachadas curvas resultado de la intersección de dos cilindros de igual radio. Lo realmente novedoso del diseño radica en el uso de un tercer cilindro con diferente curvatura para la cubierta del edificio.



Imagen 4. Business Promotion Centre, Duisburg, Alemania

La construcción, completada en 1993, consta de siete plantas y se ajusta a los habituales estándares de aprovechamiento y ahorro energético tan característicos en la arquitectura de Foster. Sin embargo, hay que destacar como inconveniente la gran cantidad de espacios de difícil aprovechamiento que contiene su interior.



Imagen 5. Interior de una planta del edificio

Imágenes 4 y 5 obtenidas en la web del estudio de Norman Foster y asociados:

<https://www.fosterandpartners.com/projects/business-promotion-centre/>

Parametrice los tres cilindros que constituyen la envolvente del edificio de acuerdo a las dimensiones que se adjuntan en la siguiente imagen:

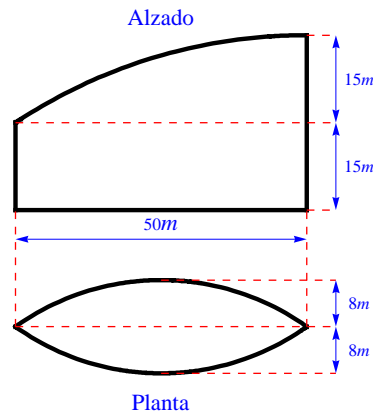


Imagen 6. Alzado y planta del edificio (imagen propia)

Además, para posibilitar la resolución se indica que la cubierta es una sección de un cilindro circular de radio 90 metros. La siguiente imagen facilita la comprensión del edificio:

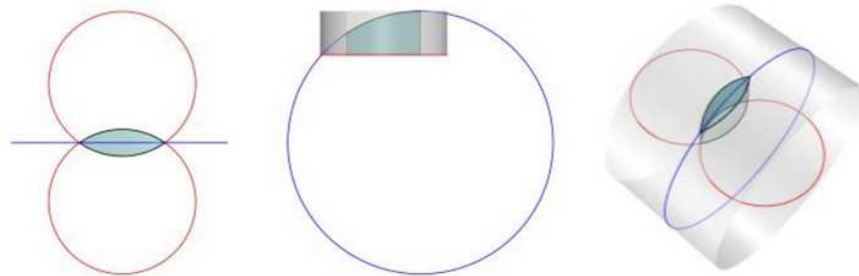


Imagen 7. Planta, alzado y vista 3D (imagen propia)

Resolución

Remove["Global`*"]

- El origen de coordenadas del sistema cartesiano de referencia se sitúa en cota 0, en el centro de la vesica piscis de la base del edificio

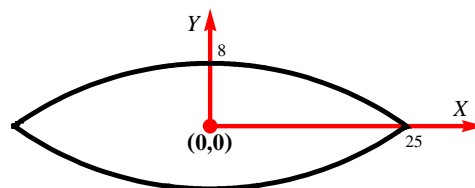


Imagen 8. Planta en el plano OXY (imagen propia)

- La vesica piscis de la planta (plano OXY) queda delimitada por dos circunferencias
 - arco que delimita la figura superiormente (circunferencia $C_1 \equiv x^2 + (y - y_{c1})^2 = r_1^2$)
 - $P = (25, 0), Q_1 = (0, 8) \in C_1$

ec1 = $x^2 + (y - yc1)^2 == r1^2$;

sist1 = {ec1 /. {x → 25, y → 0}, ec1 /. {x → 0, y → 8}};

NSolve[sist1, {yc1, r1}]

{{yc1 → -35.0625, r1 → -43.0625}, {yc1 → -35.0625, r1 → 43.0625}}

{yc1 = -35.0625, r1 = 43.0625};

- parametrización del arco, $\forall t \in [-25, 25]$

Solve[{x² + (y - yc1)² == r1²}, y]

Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numerizing the result.

$\left\{ \left\{ y \rightarrow 0.0625 \left(-561. - 1. \sqrt{474721. - 256. x^2} \right) \right\}, \left\{ y \rightarrow 0.0625 \left(-561. + \sqrt{474721. - 256. x^2} \right) \right\} \right\}$

cir1 = {x1 = t, y1 = 0.0625 (-561 + $\sqrt{474721 - 256 x1^2}$), z1 = 0};

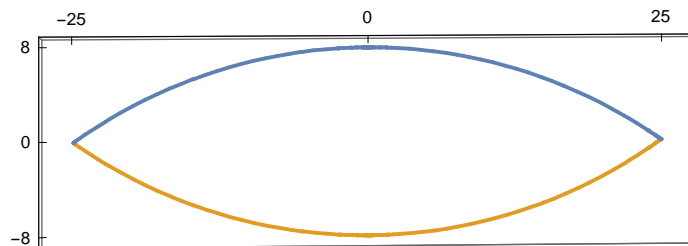
- arco que delimita la figura inferiormente (circunferencia $C_2 \equiv x^2 + (y - y_{c2})^2 = r_2^2$)
 - parametrización (utilizando la simetría de la figura), $\forall t \in [-25, 25]$

{yc2 = 35.0625, r2 = 43.0625};

cir2 = {x2 = t, y2 = 0.0625 (561 - $\sqrt{474721 - 256 x2^2}$), z2 = 0};

- representación gráfica

ParametricPlot3D[{cir1, cir2}, {t, -25, 25}, Ticks -> {{-25, 0, 25}, {-8, 0, 8}, {}]}



- Cilindros de la envolvente lateral

- la parametrización de x e y es la obtenida para las curvas de la vesica piscis dando la altura deseada a la variable z

$$S_1 \equiv \begin{cases} x_1 = & t \\ y_1 = & 0.0625 \left(-561 + \sqrt{474721 - 256 t^2} \right) \\ z_1 = & h_1 \end{cases} \quad \forall t \in [-25, 25] \subset \mathbb{R}$$

$$S_2 \equiv \begin{cases} x_1 = & t \\ y_1 = & 0.0625 \left(561 - \sqrt{474721 - 256 t^2} \right) \\ z_2 = & h_2 \end{cases} \quad \forall t \in [-25, 25] \subset \mathbb{R}$$

- Arco circular de la cubierta en el alzado (plano OXZ)

- circunferencia de radio $r_3 = 90$ metros: $C_3 \equiv (x - x_{c3})^2 + (z - z_{c3})^2 = 90^2$
- $P_3 = (25, 30)$, $Q_3 = (-25, 15) \in C_3$

r3 = 90;

ec3 = (x - xc3)² + (z - zc3)² == r3²;

sist3 = {ec3 /. {x -> 25, z -> 30}, ec3 /. {x -> -25, z -> 15}};

`NSolve[sist3, {xc3, zc3}]`

`{{xc3 → -24.7499, zc3 → 105.}, {xc3 → 24.7499, zc3 → -59.9997}}`

`{xc3 = 24.75, zc3 = -60}; (* redondeo *)`

- parametrización del arco, $\forall t \in [-25, 25]$

`NSolve[{(x - xc3)2 + (z - zc3)2 == r32}, z]`

`{{z → 0.25 (-240. - 1. √119799. + 792. x - 16. x2)}, {z → 0.25 (-240. + √119799. + 792. x - 16. x2)}}`

`cir3 = {x3 = t, y3 = 0, z3 = 0.25 (-240 + √119799 + 792 x3 - 16 x32)};`

- Cubierta cilíndrica

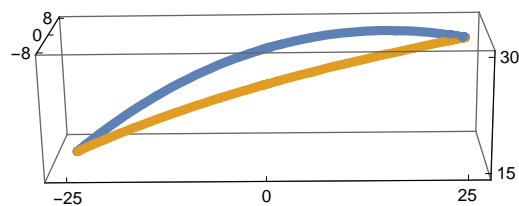
- en la variable `cir3` se tiene la parametrización de la proyección sobre $y = 0$ de las dos curvas sobre las que se apoyan las generatrices del cilindro
- parametrización y representación de las curvas

`cur1 = {x11 = x1, y11 = y1, z11 = z3};`

`cur2 = {x21 = x2, y21 = y2, z21 = z3};`

`curvas = ParametricPlot3D[{cur1, cur2}, {t, -25, 25},`

`PlotStyle → {Thickness[0.02]}, Ticks → {{-25, 0, 25}, {-8, 0, 8}, {15, 30}}, PlotRange → All]`



- parametrización con la técnica de extrusión

`{xp = u * x11 + (1 - u) * x21, yp = u * y11 + (1 - u) * y21, zp = u * z11 + (1 - u) * z21} // Simplify`

`{t, 0.125 (-561. + √474721 - 256 t2) (-0.5 + 1. u), -60. + 0.25 √119799 + 792 t - 16 t2}`

$$S_3 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0.125 \left(-561 + \sqrt{474721 - 256 t^2} \right) (-0.5 + u) & \forall t \in [-25, 25] \subset \mathbb{R} \\ z = -60 + 0.25 \left(\sqrt{119799 + 792 t - 16 t^2} \right) & \forall u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

- Representación gráfica

- las secciones cilíndricas de la envolvente lateral deben representarse hasta la z de las curvas que delimitan la cubierta

`cil1 = ParametricPlot3D[{x1, y1, z3 * u}, {t, -25, 25}, {u, 0, 1},`

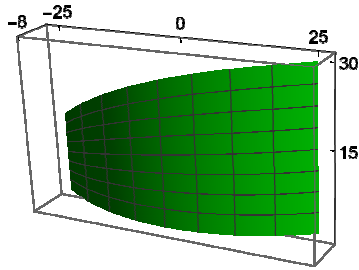
`Mesh → 7, PlotStyle → Directive[Green, Opacity[1], Specularity[Blue, 60]]];`



```

cil2 = ParametricPlot3D[{x2, y2, z3+u}, {t, -25, 25},
  {u, 0, 1}, Mesh -> 7, Ticks -> {{-25, 0, 25}, {-8, 8}, {15, 30}},
  PlotStyle -> Directive[Green, Opacity[1], Specularity[Blue, 50]]]

```

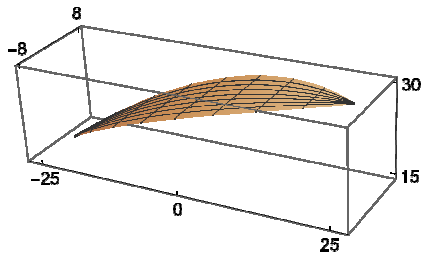


■ sección cilíndrica de la cubierta

```

cil3 = ParametricPlot3D[{xp, yp, zp}, {t, -25, 25},
  {u, 0, 1}, Mesh -> 7, Ticks -> {{-25, 0, 25}, {-8, 8}, {15, 30}},
  PlotStyle -> Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[Green, 60]]]

```



```

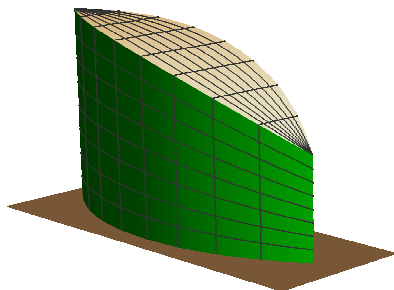
suelo = ParametricPlot3D[{x, y, 0}, {x, -30, 30}, {y, -11, 11},
  Mesh -> False, PlotStyle -> Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 80]]];

```

```

Show[cil1, cil2, cil3, suelo, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> None]

```



Ejercicio nº3

Enunciado

Félix Candela cursó arquitectura en Madrid, su ciudad natal, pero al poco tiempo de terminar sus estudios pasó a formar parte del Ejército Popular Republicano en calidad de capitán de ingenieros. Al finalizar la guerra se vio forzado a exiliarse en México donde fundó la empresa Cubiertas Ala en la que se diseñaron más de 1000 proyectos, la mayoría basados en paraboloides hiperbólicos. A pesar de ser un buen calculista y un gran conocedor de la geometría del hormigón, la mayoría de sus proyectos se basan en la intuición y en la experiencia que adquiría con cada nuevo diseño, llegando a construir bóvedas increíblemente livianas y esbeltas.

De entre sus trabajos destaca el Restaurante Los Manantiales en Xochimilco (México, D.F.). Consta de una gran bóveda formada por ocho gajos procedentes de cuatro paraboloides hiperbólicos y fue terminado en 1958.



Imagen 9. Restaurante Los Manantiales en Xochimilco (México, D.F.)

Imagen 9 de Gallery 400 bajo licencia CC BY-NC-SA 2.0 obtenida en:

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=25974324>

Pese a su espectacular diseño, Candela nunca pretendió realizar grandes gestos al expresionismo estructural sino simplemente realizar cubiertas ligeras y económicas.

El reconocimiento de Félix Candela en España le llegó al ser requerido para realizar una copia de las espectaculares cubiertas de Los Manantiales para L'Oceanogràfic de Valencia si bien falleció sin haber podido ver terminado el proyecto.

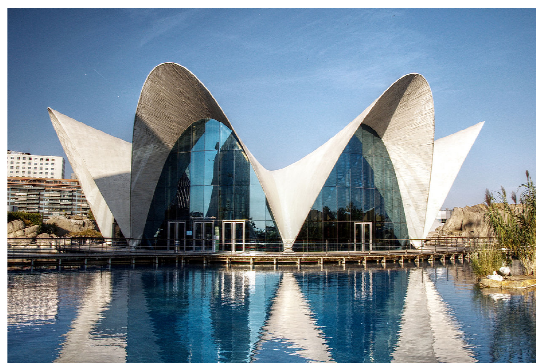


Imagen 10. L'Oceanogràfic, Valencia, España

Imagen 10 de Felipe Gabaldón bajo licencia Creative Commons Atribución 2.0 Genérica obtenida en:

[https://es.wikipedia.org/wiki/Oceanogràfic#/media/Archivo:L'Oceanografic_\(Valencia,_Spain\)_01.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Oceanogràfic#/media/Archivo:L'Oceanografic_(Valencia,_Spain)_01.jpg)

Parametrice la bóveda del Restaurante Los Manantiales según las medidas que se acompañan:

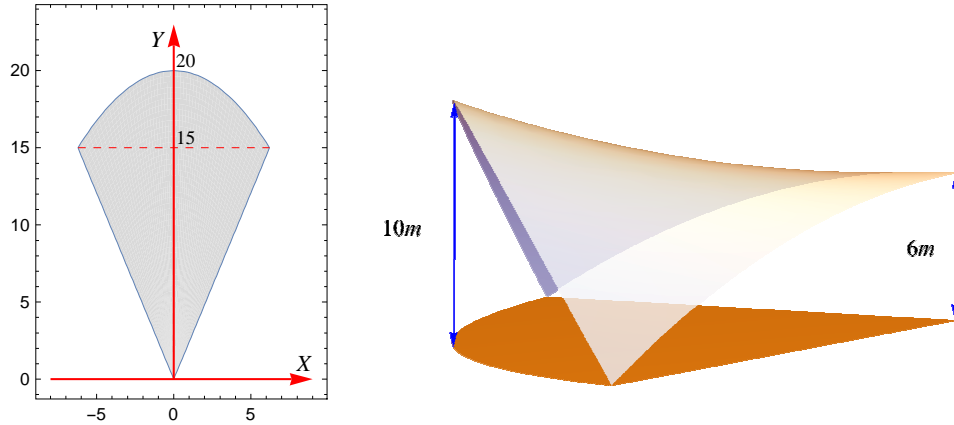


Imagen 11. Planta y perfil de un gajo del paraboloides (imagen propia)

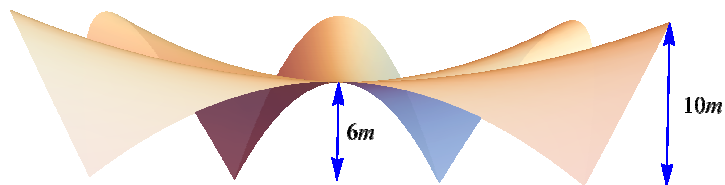


Imagen 12. Alzado con medidas (imagen propia)

Para generar los ocho gajos a partir de uno de ellos pueden emplearse las siguientes ecuaciones de giro:

$$\begin{cases} x = x \cdot \cos(t) - y \cdot \text{sen}(t) \\ y = x \cdot \text{sen}(t) + y \cdot \cos(t) \end{cases}$$

Ecuación del paraboloides hiperbólico:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z - c$$

Resolución

Remove ["Global`*"]

- Como se sugiere en el enunciado, se parametriza uno de los gajos y el esto se obtiene mediante giros
- El origen de coordenadas del sistema cartesiano de referencia se sitúa en cota 0, en el eje de giro (eje Oz)

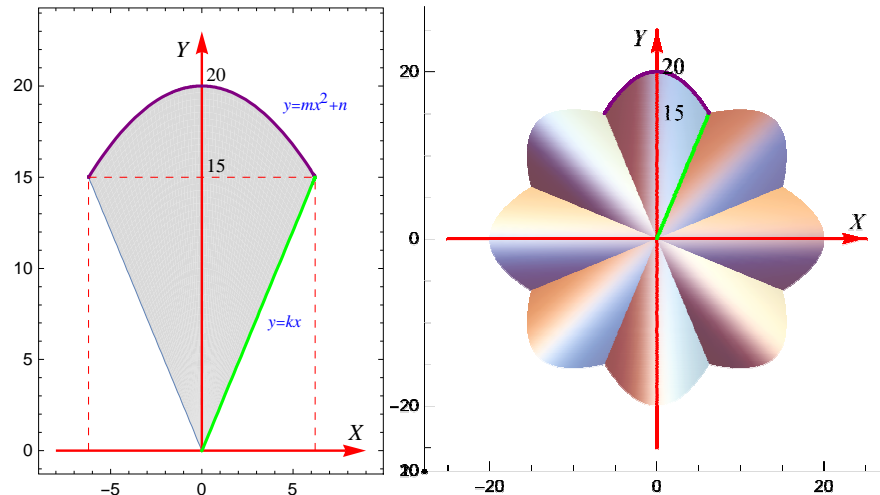


Imagen 13. Planta en el plano OXY de un ajo y de la bóveda(imagen propia)

- La proyección sobre $z = 0$ del gajo escogido queda delimitada por dos segmentos de recta que pasan por el origen y un arco de parábola
- Rectas: $r_1 \equiv y = k \cdot x$, $r_2 \equiv y = -k \cdot x$

- se deduce de la imagen 13 que: $k = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

`ecr1 = y == Tan[3 Pi / 8] * x;`

$$r_1 \equiv y = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot x$$

$$r_2 \equiv y = -\text{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot x$$

- se calcula uno de los puntos de apoyo en cota 0 del gajo: $P_1 = (6.2132, 15)$

`NSolve[ecr1 /. y -> 15, x]`

`{{x -> 6.2132}}`

`p1 = {6.2132, 15, 0};`

- Parábola: $p \equiv y = m \cdot x^2 + n$

- se calcula los coeficientes m y n sabiendo que: $P_1 = (6.2132, 15, 0)$, $P_2 = (0, 20, 0) \in p$

`p2 = {0, 20, 0};`

`ecp = y == m * x^2 + n;`

`sistp = {ecp /. {x -> p1[[1]], y -> p1[[2]]}, ecp /. {x -> p2[[1]], y -> p2[[2]]};`

`NSolve[sistp, {m, n}]`

`{{m -> -0.129521, n -> 20.}}`

`{m = -0.129521, n = 20};`

$$p \equiv y = 20 - 0.129521 x^2$$

- Paraboloide hiperbólico: $S \equiv -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z - c$

- de las medidas facilitadas se deduce que: $c = 6$

- se calcula los coeficientes a y b sabiendo que: $P_1 = (6.2132, 15, 0)$, $Q_2 = (0, 20, 10) \in S$

`q2 = {0, 20, 10};`

$$\text{ecph} = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z - 6;$$

sistph =

{ecph /. {x -> p1[[1]], y -> p1[[2]], z -> p1[[3]]}, ecph /. {x -> q2[[1]], y -> q2[[2]], z -> q2[[3]]}};

NSolve[sistph, {a, b}, PositiveReals]

{{b -> 10., a -> 2.16316}}

{b = 10, a = 2.16316};

$$S \equiv -\frac{x^2}{(2.16316)^2} + \frac{y^2}{100} = z - 6$$

■ parametrización del gajo seleccionado

{xp = u * t, yp = u * (n + m * t^2), zp = 6 - \frac{xp^2}{a^2} + \frac{yp^2}{b^2}} // Simplify

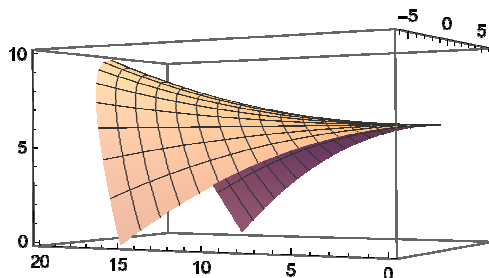
{t u, (20 - 0.129521 t^2) u, 6. + (4. - 0.265517 t^2 + 0.000167757 t^4) u^2}

$$S \equiv \begin{cases} x = & u \cdot t \\ y = & (20 - 0.129521 t^2) u \\ z = & 6 + (4 - 0.265517 t^2 + 0.0001678 t^4) u^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall t \in [-6.2132, 6.2132] \subset \mathbb{R} \\ \forall u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

■ representación gráfica del gajo seleccionado

gaj1 = ParametricPlot3D[{xp, yp, zp}, {t, -6.2132, 6.2132}, {u, 0, 1},

PlotStyle -> Directive[White, Opacity[1], Specularity[Green, 50]], PlotRange -> All, Mesh -> True]



■ Obtención de la bóveda

■ usando las ecuaciones de giro se determinan los otros siete gajos

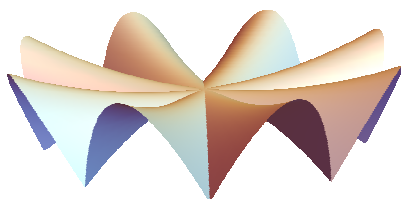
Do[{giro = k Pi / 4, xg = xp Cos[giro] - yp Sin[giro], yg = xp Sin[giro] + yp Cos[giro]}];

p[k] = ParametricPlot3D[{xg, yg, zp}, {t, -15 Tan[\frac{\pi}{8}], 15 Tan[\frac{\pi}{8}]}, {u, 0, 1}, PlotStyle ->

Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[Pink, 50]], PlotRange -> All, Mesh -> False], {k, 0, 7}]

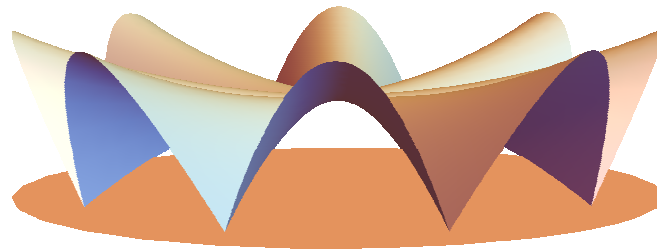
bov = Table[p[k], {k, 0, 7}];

bóveda = Show[bov, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False]



```

cota0 = ParametricPlot3D[{u * 20 Cos[t], u * 20 Sin[t], 0}, {t, 0, 2 Pi},
  {u, 0, 1}, Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightMagenta, Opacity[1]]];
bóveda2 = Show[bov, cota0, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False]
  
```



Ejercicio nº4

Enunciado

En 1989, apenas seis años después de haber abierto su estudio en Nueva York, el arquitecto chileno Rafael Viñoly fue seleccionado para construir el *Foro Internacional* de Tokio, el más importante equipamiento cultural del país. Finalizado en 1996, el conjunto consta de cinco edificios inteligentemente dispuestos sobre una plaza ajardinada, aportando una fácil accesibilidad desde los medios de transporte y una gran conectividad entre los diferentes espacios culturales y expositivos.

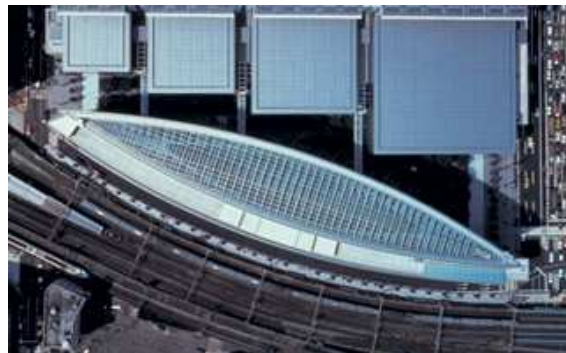


Imagen 14. Vista cenital del *International Forum*, Tokyo, Japón

Imagen 14 obtenida de *Google Maps*.

Cuatro grandes volúmenes, de 40 metros de altura y planta decreciente, conectan el complejo con la retícula urbana. Un quinto edificio formado por dos arcos de acero y vidrio adapta su curvatura al entramado ferroviario que rodea el recinto, aprovechando al máximo el espacio y separando el conjunto de la playa de vías. Es precisamente este último edificio con sus muros cortina de 60 metros de altura el que más personalidad otorga al conjunto. Por la noche su interior, plagado de hermosas rampas y pasos peatonales, se ilumina trazando el perfil de un gigantesco barco que forma parte del paisaje nocturno de Tokio.

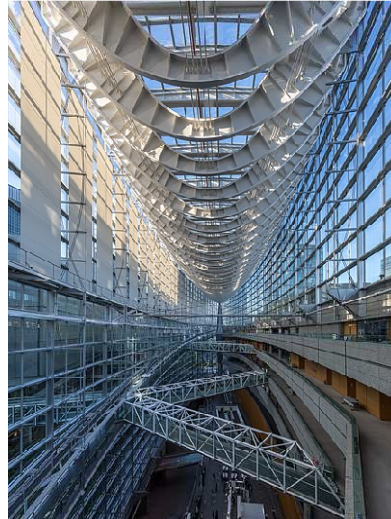


Imagen 15. Interior del edificio acristalado

Imagen 15 de Basile Morin bajo licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International obtenida en:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Interior_of_the_Tokyo_International_Forum_Glass_Building,_Japan.jpg

Parametrice y represente gráficamente los cinco edificios de acuerdo a las medidas recogidas en la planta:

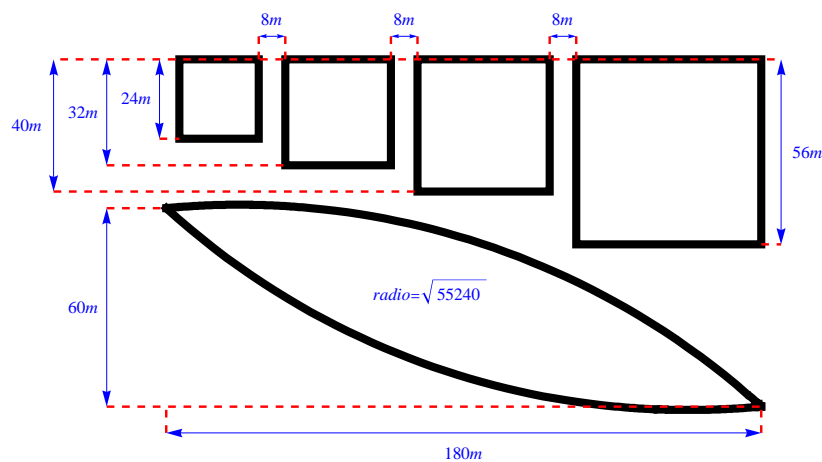


Imagen 16. Planta del complejo (imagen propia)

Resolución

Remove ["Global`*"]

- El origen de coordenadas del sistema cartesiano de referencia se sitúa en cota 0 tal como se muestra en la siguiente imagen:

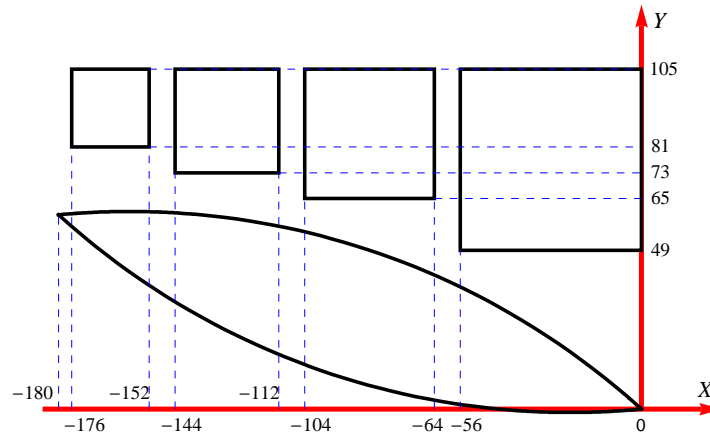


Imagen 17. Planta en el plano OXY (imagen propia)

- La vesica piscis de la planta (plano OXY) queda delimitada por dos circunferencias del mismo radio, $r = \sqrt{55240}$

$$r = \sqrt{55240};$$

- arco que delimita la figura superiormente (circunferencia $C_1 \equiv (x - x_{c1})^2 + (y - y_{c1})^2 = r^2$)

- $O = (0, 0), Q = (-180, 60) \in C_1$

$$ec1 = (x - xc1)^2 + (y - yc1)^2 == r^2;$$

$$sist1 = \{ec1 /. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}, ec1 /. \{x \rightarrow -180, y \rightarrow 60\}\};$$

$$NSolve[sist1, \{xc1, yc1\}]$$

$$\{\{xc1 \rightarrow -158., yc1 \rightarrow -174.\}, \{xc1 \rightarrow -22., yc1 \rightarrow 234.\}\}$$

- Centro: $P_1 = (-158, -174)$

$$\{xc1 = -158, yc1 = -174\};$$

- parametrización del arco, $\forall t \in [-180, 0]$

$$Solve[\{(x - xc1)^2 + (y - yc1)^2 == r^2\}, y]$$

$$\{\{y \rightarrow -174 - \sqrt{30276 - 316x - x^2}\}, \{y \rightarrow -174 + \sqrt{30276 - 316x - x^2}\}\}$$

$$cir1 = \{x1 = t, y1 = -174 + \sqrt{30276 - 316t - t^2}, z1 = 0\};$$

- arco que delimita la figura inferiormente (circunferencia $C_2 \equiv (x - x_{c2})^2 + (y - y_{c2})^2 = r^2$)

- $O = (0, 0), Q = (-180, 60) \in C_2$

- Centro (segunda solución del sistema $sist1$ planteado): $P_2 = (-22, 234)$

$$\{xc2 = -22, yc2 = 234\};$$

- parametrización del arco, $\forall t \in [-180, 0]$

$$Solve[\{(x - xc2)^2 + (y - yc2)^2 == r^2\}, y]$$

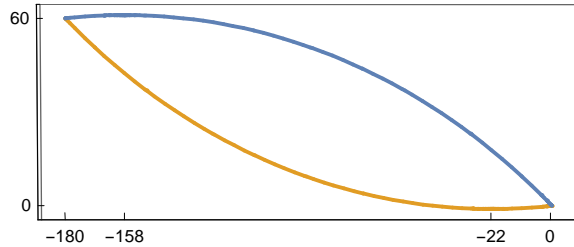
$$\{\{y \rightarrow 234 - \sqrt{54756 - 44x - x^2}\}, \{y \rightarrow 234 + \sqrt{54756 - 44x - x^2}\}\}$$

$$cir2 = \{x2 = t, y2 = 234 - \sqrt{54756 - 44t - t^2}, z2 = 0\};$$

- representación gráfica

```

ParametricPlot3D[{cir1, cir2}, {t, -180, 0},
Ticks -> {{-180, -158, -22, 0}, {0, 60}, {}}, ViewPoint -> {0, 0, Infinity}]
  
```



- Cilindros de las fachadas laterales

- la parametrización de x e y es la obtenida para las curvas de la vesica piscis $\forall z \in [0, 60]$

$$S_1 \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = -174 + \sqrt{30276 - 316t - t^2} \\ z_1 = u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall t \in [-25, 25] \subset \mathbb{R} \\ \forall u \in [0, 60] \end{matrix}$$

$$S_2 \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = 234 - \sqrt{54756 - 44t - t^2} \\ z_1 = u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall t \in [-25, 25] \subset \mathbb{R} \\ \forall u \in [0, 60] \end{matrix}$$

- Cubierta plana a 60 metros de altura

- parametrización de los dos arcos circulares que delimitan la cubierta y sobre los que se apoyan las generatrices del plano

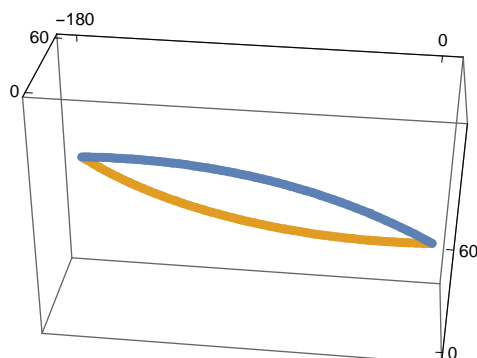
$h = 60$;

$cur1 = \{x_{11} = x_1, y_{11} = y_1, z_{11} = h\}$;

$cur2 = \{x_{21} = x_2, y_{21} = y_2, z_{21} = h\}$;

```

curvas = ParametricPlot3D[{cur1, cur2}, {t, -180, 0},
PlotStyle -> {Thickness[0.02]}, Ticks -> {{-180, 0}, {0, 60}, {0, 60}}, PlotRange -> All]
  
```



- parametrización de la sección plana con la técnica de extrusión

```

{xp = u * x11 + (1 - u) * x21, yp = u * y11 + (1 - u) * y21, zp = u * z11 + (1 - u) * z21} // Simplify
  
```

$$\left\{ t, \left(-234 + \sqrt{54756 - 44t - t^2} \right) (-1 + u) + \left(-174 + \sqrt{30276 - 316t - t^2} \right) u, 60 \right\}$$

- Representación gráfica

- las secciones cilíndricas de las fachadas laterales

```

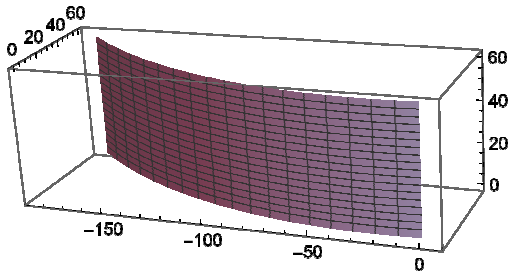
cil1 = ParametricPlot3D[{x1, y1, u}, {t, -180, 0}, {u, 0, 60},
  Mesh -> 17, PlotStyle -> Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[Green, 10]]];

```

```

cil2 = ParametricPlot3D[{x2, y2, u}, {t, -180, 0}, {u, 0, 60},
  Mesh -> 17, PlotStyle -> Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[Green, 10]]]

```

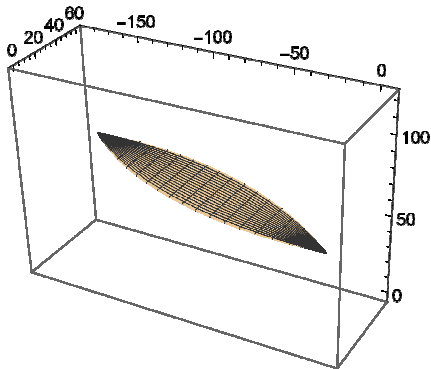


- sección cilíndrica de la cubierta

```

cil3 = ParametricPlot3D[{xp, yp, zp}, {t, -180, 0}, {u, 0, 1},
  Mesh -> 17, PlotStyle -> Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[Gray, 10]]]

```



```

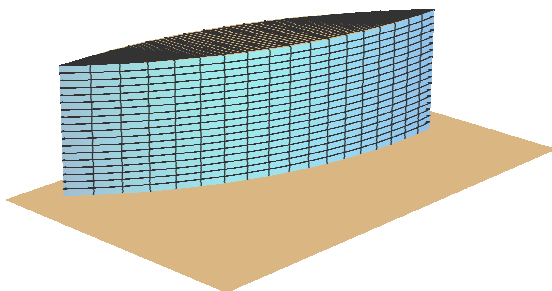
suelo = ParametricPlot3D[{x, y, 0}, {x, -200, 20}, {y, -15, 120},
  Mesh -> False, PlotStyle -> Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[White, 80]]];

```

```

b0 = Show[cil1, cil2, cil3, suelo, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> None]

```



- Representación gráfica de los cuatro cubos que completan el complejo
 - no se detallan las parametrizaciones ya que se trata de secciones cuadrangulares
 - Bloque n^o1

```

g11 = ParametricPlot3D[{x, 105, z}, {x, -176, -152}, {z, 0, 40},
  Mesh → False, PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g12 = ParametricPlot3D[{x, 81, z}, {x, -176, -152}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g13 = ParametricPlot3D[{-176, y, z}, {y, 81, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g14 = ParametricPlot3D[{-152, y, z}, {y, 81, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g15 = ParametricPlot3D[{x, y, 40}, {x, -176, -152}, {y, 81, 105}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightBlue, Opacity[1], Specularity[White, 20]]];
b1 = Show[g11, g12, g13, g14, g15, PlotRange → All];
  
```

- Bloque n^o2

```

g21 = ParametricPlot3D[{x, 105, z}, {x, -144, -112}, {z, 0, 40},
  Mesh → False, PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g22 = ParametricPlot3D[{x, 73, z}, {x, -144, -112}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g23 = ParametricPlot3D[{-144, y, z}, {y, 73, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g24 = ParametricPlot3D[{-112, y, z}, {y, 73, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g25 = ParametricPlot3D[{x, y, 40}, {x, -144, -112}, {y, 73, 105}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
b2 = Show[g21, g22, g23, g24, g25, PlotRange → All];
  
```

- Bloque n^o3

```

g31 = ParametricPlot3D[{x, 105, z}, {x, -104, -64}, {z, 0, 40},
  Mesh → False, PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g32 = ParametricPlot3D[{x, 65, z}, {x, -104, -64}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g33 = ParametricPlot3D[{-104, y, z}, {y, 65, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g34 = ParametricPlot3D[{-64, y, z}, {y, 65, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g35 = ParametricPlot3D[{x, y, 40}, {x, -104, -64}, {y, 65, 105}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
b3 = Show[g31, g32, g33, g34, g35, PlotRange → All];
  
```

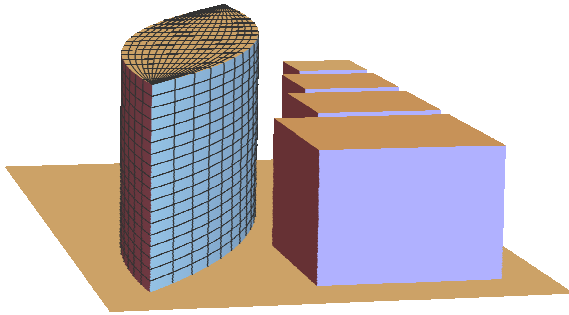
- Bloque n^o4

```

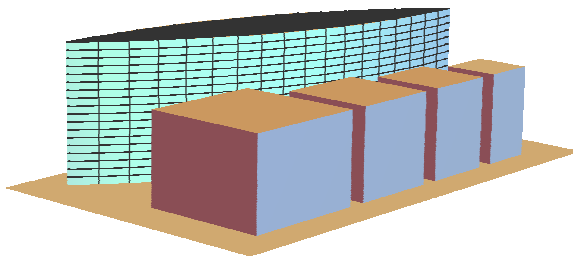
g41 = ParametricPlot3D[{x, 105, z}, {x, -56, 0}, {z, 0, 40},
  Mesh → False, PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g42 = ParametricPlot3D[{x, 49, z}, {x, -56, 0}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g43 = ParametricPlot3D[{-56, y, z}, {y, 49, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g44 = ParametricPlot3D[{0, y, z}, {y, 49, 105}, {z, 0, 40}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
g45 = ParametricPlot3D[{x, y, 40}, {x, -56, 0}, {y, 49, 105}, Mesh → False,
  PlotStyle → Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Blue, 20]]];
b4 = Show[g41, g42, g43, g44, g45, PlotRange → All];
  
```

- Representación conjunta del complejo

```
Show[b0, b1, b2, b3, b4, suelo, PlotRange → All, Boxed → False, Axes → False]
```



■ otro punto de vista



Ejercicio nº5

Enunciado

El más venerado de los arquitectos japoneses, Kenzo Tange, visitó numerosos templos góticos europeos antes de embarcarse en el encargo de una catedral católica para Tokio. A ello se unió la fascinación que sentía por la arquitectura moderna europea, en especial por Le Corbusier. Es a partir de esta curiosa sinergia que surge el diseño de la Catedral de Santa María en Tokio, finalizada en 1964.



Imagen 18. Fachada principal de la Catedral de Santa María, Tokyo, Japón

La Catedral de Santa María está compuesta por ocho gigantes paraboloides hiperbólicos que forman una transición desde una figura romboidal en planta a una cruz latina en su cenit. La cruz está formada por vidrieras que proporcionan la única luz natural al conjunto.



Imagen 19. Vista de una fachada lateral

Imágenes 18 y 19 de Morio bajo licencia CC BY-SA 3.0 obtenidas, respectivamente, en:

<https://search.creativecommons.org/photos/183ae3e7-349e-467c-a5f8-f8807508907a>

<https://search.creativecommons.org/photos/044e65b1-473d-4094-bb31-4e9a1faef620>

El templo está construido en hormigón y revestido de aluminio galvanizado y acero inoxidable. La luminosidad exterior frente a la oscuridad y sobriedad del interior supone un claro contraste con las catedrales europeas.

Parametrice y diseñe los ocho paraboloides hiperbólicos que definen el edificio según las medidas que se facilitan.

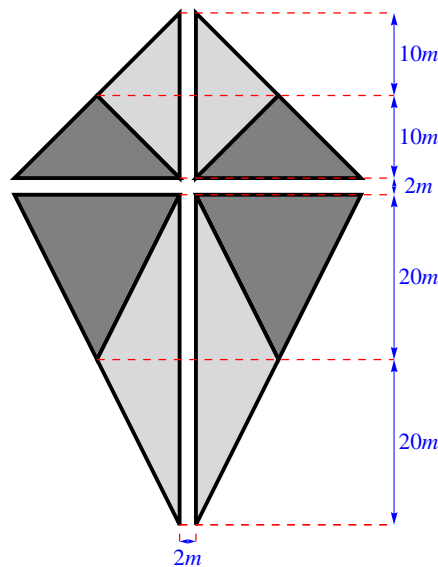


Imagen 20. Planta de la Catedral (imagen propia)

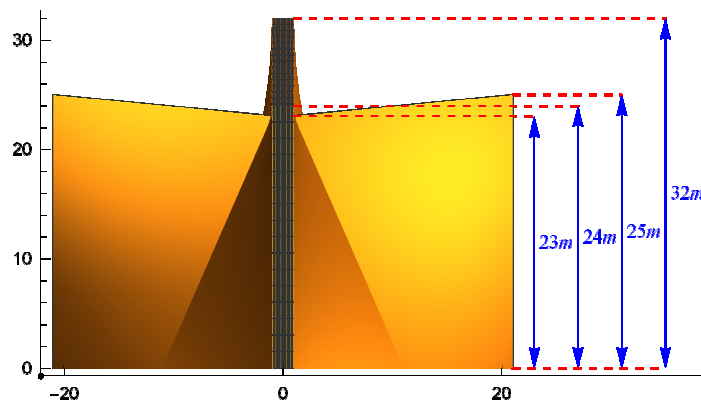


Imagen 21. Alzado de la catedral (imagen propia)

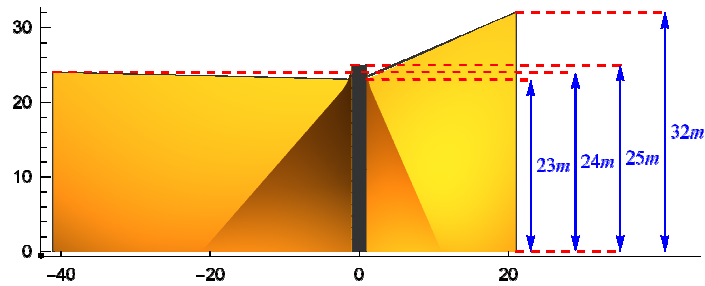


Imagen 22. Perfil de la catedral (imagen propia)

Resolución

Remove ["Global`*"]

- El origen de coordenadas del sistema cartesiano de referencia se sitúa en cota 0 tal como se muestra en la siguiente imagen:

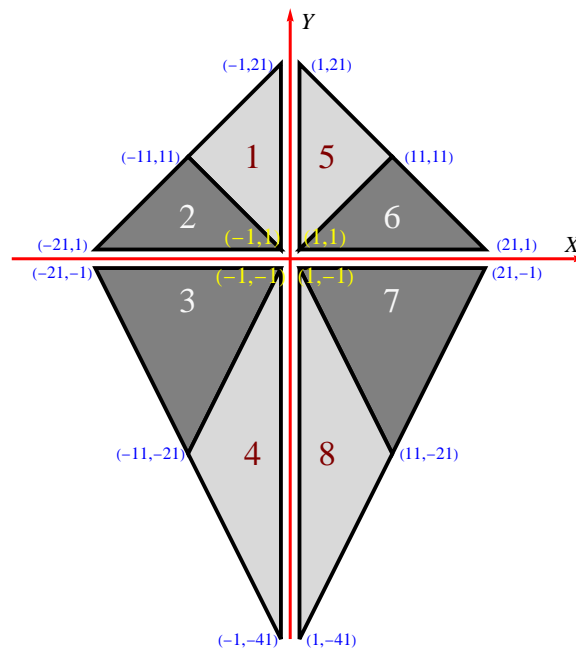


Imagen 23. Planta en el plano OXY (imagen propia)

- se señalan las coordenadas, en metros, de los puntos necesarios en la parametrización
- los triángulos numerados se corresponden con la proyección de cada uno de los ocho paraboloides hiperbólicos
- Aunque aparentemente complejo, obsérvese que las generatrices de todos los paraboloides se apoyan en dos segmentos de recta: uno en cota 0 y el otro siempre es una de las aristas que conforman la cruz latina que se observa en planta
- Por otra parte, basta con calcular cuatro paraboloides (por ejemplo, los numerados del 1 al 4) y obtener los restantes haciendo uso de la simetría de la planta respecto al eje Oy
- Se va a explicar con detalle el cálculo del paraboloides nº1, los otros tres (números 2, 3 y 4) se hallan de forma análoga
- Paraboloides nº1**
 - se parametrizan los segmentos de recta sobre los que se apoyan las generatrices para la misma variación de valores del parámetro, $\forall t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$; de esta forma, podrá aplicarse la técnica de extrusión

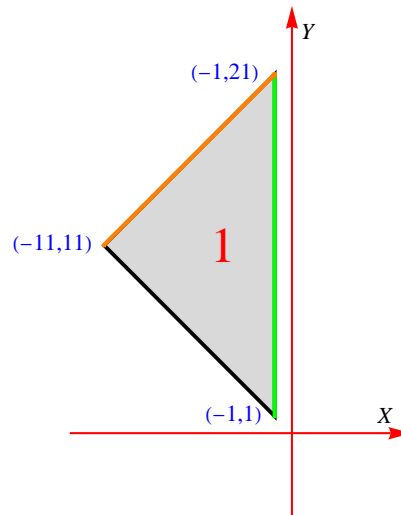


Imagen 24. Proyección del paraboloides nº1 sobre OXY (imagen propia)

- segmento de recta en cota 0 (color naranja en la imagen 22), limitado entre los puntos $P_{10} = (-1, 21, 0) \in C_{10}$ y $Q_{10} = (-11, 11, 0) \in C_{10}$

$$C_{10} \equiv \begin{cases} x_1 = -11 + 10t \\ y_1 = 11 + 10t \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, 1]$$

$\{x_{10} = -11 + 10t, y_{10} = 11 + 10t, z_{10} = 0\};$

- segmento de recta en la cota de la cruz (proyección en color verde en la imagen 22), limitado entre los puntos $P_{1c} = (-1, 21, 32) \in C_{1c}$ y $Q_{1c} = (-1, 1, 23) \in C_{1c}$

$$C_{1c} \equiv \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 + 20t \\ z_1 = 23 + 9t \end{cases} \quad \forall t \in [0, 1]$$

$\{x_{1c} = -1, y_{1c} = 1 + 20t, z_{1c} = 23 + 9t\};$

- parametrización de la superficie con la técnica de extrusión

$\{xp1 = u * x10 + (1 - u) * x1c, yp1 = u * y10 + (1 - u) * y1c, zp1 = u * z10 + (1 - u) * z1c\} // Simplify$

$\{-1 + 10(-1 + t)u, 1 - 10t(-2 + u) + 10u, -(23 + 9t)(-1 + u)\}$

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 10(-1 + t) \cdot u \\ y = 1 - 10t(-2 + u) + 10u \\ z = -(23 + 9t)(-1 + u) \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall t \in [0, 1] \\ \forall u \in [0, 1] \end{matrix}$$

- representación gráfica

- segmentos de recta

$c10 = ParametricPlot3D[\{x10, y10, z10\}, \{t, 0, 1\}, PlotStyle \rightarrow Directive[Orange, Thickness[0.03]]];$

$c1c = ParametricPlot3D[\{x1c, y1c, z1c\}, \{t, 0, 1\}, PlotStyle \rightarrow Directive[Green, Thickness[0.03]]];$

- paraboloides

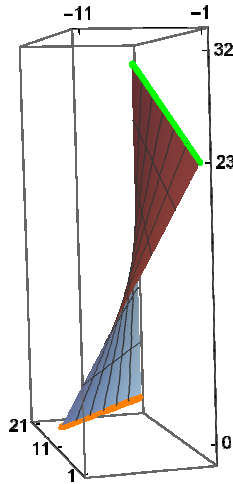
$pr1 = ParametricPlot3D[\{xp1, yp1, zp1\}, \{t, 0, 1\}, \{u, 0, 1\},$

$Mesh \rightarrow 5, PlotStyle \rightarrow Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];$

```

par1 = ParametricPlot3D[{xp1, yp1, zp1}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];
  ■ segmentos y paraboloides

Show[pr1, c10, c1c, PlotRange -> All, Ticks -> {{-1, -11}, {1, 11, 21}, {0, 23, 32}}]
  
```



- Paraboloides nº5
 - por simetría

```

{xp5 = -xp1, yp5 = yp1, zp5 = zp1} // Simplify
{1 - 10 (-1 + t) u, 1 - 10 t (-2 + u) + 10 u, -(23 + 9 t) (-1 + u)}
  
```

$$S_5 \equiv \begin{cases} x = 1 - 10(-1+t) \cdot u & \forall t \in [0, 1] \\ y = 1 - 10t(-2+u) + 10u & \forall u \in [0, 1] \\ z = (-23+9t)(-1+u) \end{cases}$$

- representación gráfica

```

par5 = ParametricPlot3D[{xp5, yp5, zp5}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];
  
```

- Se procede de forma análoga para el resto de pares simétricos de paraboloides (se obvia la transcripción de las ecuaciones paramétricas que pueden consultarse en la salida correspondiente)

- Paraboloides nº2

- segmento de recta en cota 0, limitado entre los puntos $P_{20} = (-21, 1, 0)$ y $Q_{10} = (-11, 11, 0)$

```
{x20 = -(1 + 10 + 10 t), y20 = 1 + 10 - 10 t, z20 = 0};
```

- segmento de recta en la cota de la cruz, limitado entre los puntos $P_{1c} = (-1, 1, 23)$ y $Q_{2c} = (-21, 1, 25)$

```
{x2c = -(1 + 20 t), y2c = 1, z2c = 23 + 2 t};
```

- parametrización de la superficie con la técnica de extrusión

```

{xp2 = u * x20 + (1 - u) * x2c, yp2 = u * y20 + (1 - u) * y2c, zp2 = u * z20 + (1 - u) * z2c} // Simplify
{-1 + 10 t (-2 + u) - 10 u, 1 - 10 (-1 + t) u, -(23 + 2 t) (-1 + u)}
  
```

- representación gráfica

```

par2 = ParametricPlot3D[{xp2, yp2, zp2}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];
  
```

■ **Paraboloide nº6**

- por simetría

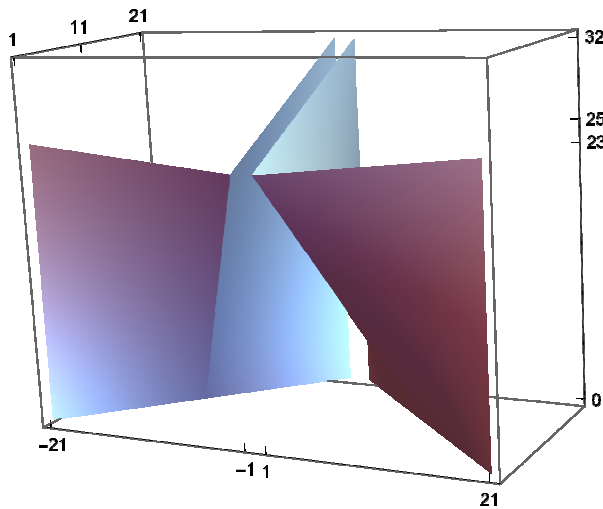
```
{xp6 = -xp2, yp6 = yp2, zp6 = zp2} // Simplify
{1 - 10 t (-2 + u) + 10 u, 1 - 10 (-1 + t) u, -(23 + 2 t) (-1 + u)}
```

- representación gráfica

```
par6 = ParametricPlot3D[{xp6, yp6, zp6}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];
```

- Representación de los cuatro paraboloides parametrizados

```
med1 = Show[par1, par2, par6, par5, PlotRange -> All,
  Ticks -> {{-21, -1, 1, 21}, {1, 11, 21}, {0, 23, 25, 32}}]
```



■ **Paraboloide nº3**

- segmento de recta en cota 0, limitado entre los puntos $P_{30} = (-21, -1, 0)$ y $Q_{30} = (-11, -21, 0)$

```
{x30 = -(1 + 10 + 10 t), y30 = -1 - 20 + 20 t, z30 = 0};
```

- segmento de recta en la cota de la cruz, limitado entre los puntos $P_{3c} = (-21, -1, 25) \in C_{3c}$ y $Q_{3c} = (-1, -1, 23) \in C_{3c}$

```
{x3c = -(1 + 20 t), y3c = -1, z3c = 23 + 2 t};
```

- parametrización de la superficie con la técnica de extrusión

```
{xp3 = u * x30 + (1 - u) * x3c, yp3 = u * y30 + (1 - u) * y3c, zp3 = u * z30 + (1 - u) * z3c} // Simplify
{-1 + 10 t (-2 + u) - 10 u, -1 + 20 (-1 + t) u, -(23 + 2 t) (-1 + u)}
```

- representación gráfica

```
par3 = ParametricPlot3D[{xp3, yp3, zp3}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];
```

■ **Paraboloide nº7**

- por simetría

```
{xp7 = -xp3, yp7 = yp3, zp7 = zp3} // Simplify
{1 - 10 t (-2 + u) + 10 u, -1 + 20 (-1 + t) u, -(23 + 2 t) (-1 + u)}
```


- representación gráfica

```
par7 = ParametricPlot3D[{xp7, yp7, zp7}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Gray, 10]]];
```

- Paraboloides n°4

- segmento de recta en cota 0, limitado entre los puntos $P_{40} = (-1, -41, 0)$ y $Q_{30} = (-11, -21, 0)$

```
{x40 = -(1 + 10 - 10 t), y40 = -1 - 20 - 20 t, z40 = 0};
```

- segmento de recta en la cota de la cruz, limitado entre los puntos $P_{4c} = (-1, -41, 24)$ y $Q_{3c} = (-1, -1, 23)$

```
{x4c = -(1 + 0), y4c = -1 - 40 t, z4c = 23 + t};
```

- parametrización de la superficie con la técnica de extrusión

```
{xp4 = u * x40 + (1 - u) * x4c, yp4 = u * y40 + (1 - u) * y4c, zp4 = u * z40 + (1 - u) * z4c} // Simplify
{-1 + 10 (-1 + t) u, -1 + 20 t (-2 + u) - 20 u, -(23 + t) (-1 + u)}
```

- representación gráfica

```
par4 = ParametricPlot3D[{xp4, yp4, zp4}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[White, 10]]];
```

- Paraboloides n°8

- por simetría

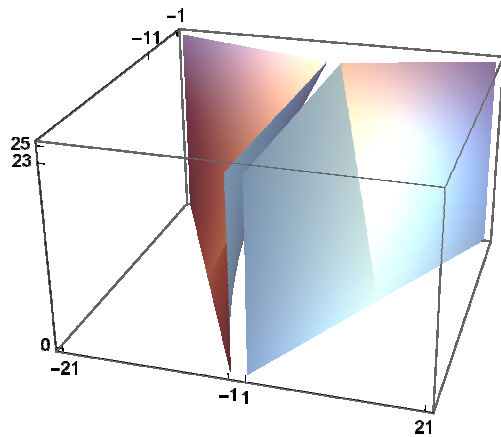
```
{xp8 = -xp4, yp8 = yp4, zp8 = zp4} // Simplify
```

```
{1 - 10 (-1 + t) u, -1 + 20 t (-2 + u) - 20 u, -(23 + t) (-1 + u)}
```

- representación gráfica

```
par8 = ParametricPlot3D[{xp8, yp8, zp8}, {t, 0, 1}, {u, 0, 1},
  Mesh -> None, PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[1], Specularity[Gray, 10]]];
```

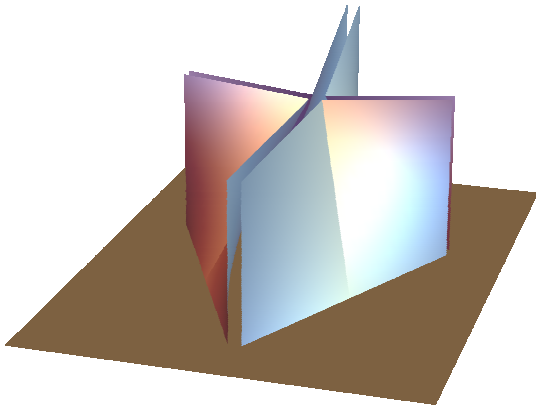
```
med2 = Show[par3, par7, par4, par8, PlotRange -> All, Ticks -> {{-21, -1, 1, 21}, {-11, -1}, {0, 23, 25}}]
```



- Representación de los ocho paraboloides

```
suelo = ParametricPlot3D[{x, y, 0}, {x, -30, 30}, {y, -50, 30},
  Mesh -> False, PlotStyle -> Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 80]]];
```

```
cat = Show[med1, med2, suelo, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False]
```



■ Vidriera

- se simula una vidriera que cubre el espacio entre los paraboloides para ser más fieles al modelo original
- no se pide en el enunciado

```
s1 = ParametricPlot3D[{u, t, 23 + (2 u)/21}, {u, 0, 21}, {t, -1, 1}];
```

```
s2 = ParametricPlot3D[{u, t, 23 - (2 u)/21}, {u, 0, -21}, {t, -1, 1}];
```

```
s3 = ParametricPlot3D[{21, u, t}, {u, -1, 1}, {t, 25, 0}];
```

```
s4 = ParametricPlot3D[{-21, u, t}, {u, -1, 1}, {t, 25, 0}];
```

```
s5 = ParametricPlot3D[{u, t, 23 - (t)/41}, {u, -1, 1}, {t, -41, 0}];
```

```
s6 = ParametricPlot3D[{u, -41, t}, {u, -1, 1}, {t, 24, 0}];
```

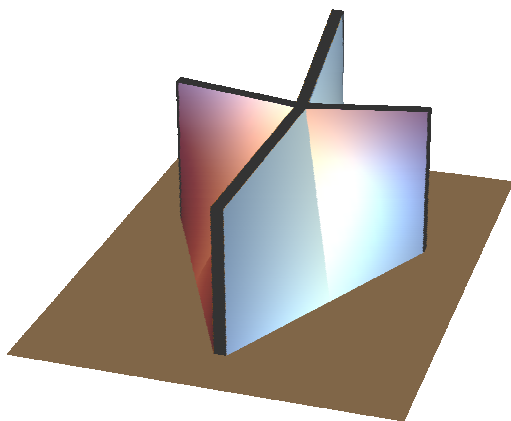
```
s7 = ParametricPlot3D[{u, t, 23 + (3 t)/7}, {u, -1, 1}, {t, 21, 0}];
```

```
s8 = ParametricPlot3D[{u, 21, t}, {u, -1, 1}, {t, 32, 0}];
```

```
vid = Show[s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False];
```

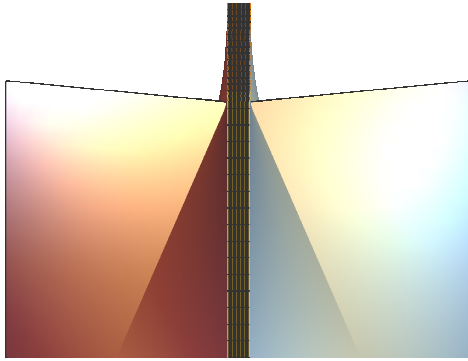
■ Catedral de St. Mary

```
stmary = Show[cat, vid, suelo, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False]
```

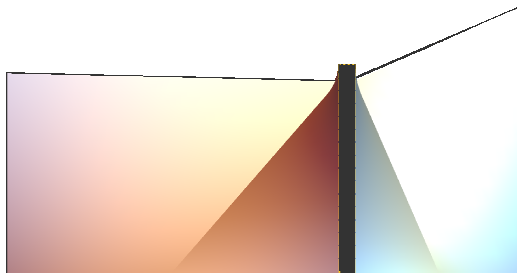


■ alzado y perfil

```
stalz = Show[cat, vid, suelo, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False, ViewPoint -> {0, -Infinity, 0}]
```



```
stper = Show[cat, vid, suelo, PlotRange -> All, Boxed -> False, Axes -> False, ViewPoint -> {Infinity, 0, 0}]
```



■ otro punto de vista

