eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

Material de estudio

OCW 2020: *Parametrización y representación gráfica de superficies construidas*

Tema 4. Parametrización de superficies cuádricas y de revolución

Equipo docente del curso
Martín Yagüe, Luis
Barrallo Calonge, Javier
Soto Merino, Juan Carlos
Lecubarri Alonso, Inmaculada

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB/BIE)
ETS de Arquitectura de Donostia-San Sebastián (ETSASS/DAGET)

TEMA 4. PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES CUÁDRICAS Y DE REVOLUCIÓN

Introducción

En este tema se trata la parametrización y representación gráfica de superficies más complejas. En concreto, aquellas superficies cuádricas y de revolución que son usadas más frecuentemente en edificios caracterizados por la singularidad de su geometría: elipsoides, esferas, conos, hiperboloides de una hoja, paraboloides y cilindros (estos se trataron en el tema anterior).

Para cada una se indican su ecuación canónica y una forma paramétrica. La parametrización usada es válida, con ligeros matices, para cualquier tipo de superficie cuádrica siempre que las secciones paralelas a uno de los planos coordenados sean curvas cerradas. El paraboloide hiperbólico se tratará en el siguiente tema.

En los ejercicios resueltos y propuestos en el tema no se desarrollan casos a partir de las ecuaciones dadas de unas superficies determinadas. El problema es el inverso. En primer lugar, se identifica el tipo de superficie construida. A partir de las medidas y especificaciones recogidas en los planos se realiza la parametrización y, posteriormente, se lleva a cabo la representación gráfica.

Se vuelve a insistir que, por tanto, se consideran sistemas de referencia apropiados para simplificar las tareas planteadas. Por ello, en las ecuaciones cuadráticas se prescinde de los términos rectangulares, indicadores de giros.

Se tratan cuádricas centradas o con vértice en el origen y cuyo eje sea uno de los ejes coordenados. En el caso de las superficies de revolución, se considera como eje de giro preferentemente el Oz que es el más habitual en este tipo de elementos constructivos.

Si fuera precisa una traslación de la superficie, se realiza después de la parametrización sin más que sumar a cada ecuación la coordenada correspondiente del punto al que se traslada el centro o el vértice.

Superficies cuádricas

Definición

Considerando un sistema ortonormado de coordenadas $OXYZ$, una superficie cuádrica es el lugar geométrico en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ formado por todos los puntos (x, y, z) que verifican una ecuación general de segundo grado:

$$\boxed{F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}$$

donde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbb{R}$.

Se excluyen los casos degenerados y, al no considerarse giros, no se tienen en cuenta los términos rectangulares: Dxy, Exz, Fyz.

Así, la ecuación de una superficie cuádrica se reduce a una expresión del tipo:

$$\boxed{F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0}$$

donde $A, B, C, D, E, F, G \in \mathbb{R}$.

En las ecuaciones canónicas el centro ó el vértice se sitúa en el origen de coordenadas y los ejes de las superficies coinciden con los ejes coordenados.

Parametrización

Las ecuaciones paramétricas de una superficie no son únicas. Pueden obtenerse diferentes parametrizaciones para cada una de ellas siendo algunas de uso más usual.

Partiendo de la ecuación canónica, se asigna a dos de las coordenadas cuyos términos cuadráticos tengan el mismo signo la siguiente parametrización (las constantes $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ se corresponden con semiejes de la superficie si fuera el caso):

$$\boxed{\begin{cases} x(t, u) = & a \cdot u \cdot \cos(t) \\ y(t, u) = & b \cdot u \cdot \operatorname{sen}(t) \end{cases}}$$

La tercera coordenada se despeja de la ecuación canónica y se sustituye la parametrización anterior:

$$\boxed{z = f(x(t, u), y(t, u))}$$

De esta forma, estas ecuaciones son válidas $\forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ y:

- $\forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ si la superficie es cerrada
- $\forall\, u \in [0, h] \subset \mathbb{R}$, siendo h la altura, si la superficie es abierta a excepción del hiperboloide de una hoja en el que $u \in [1, h] \subset \mathbb{R}$

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

- Se parametrizan x e y : $\begin{cases} x(t, u) = & 2u \cdot \cos(t) & \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ y(t, u) = & 2u \cdot \operatorname{sen}(t) & \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{cases}$

```
{x = 2 u * Cos[t], y = 2 u * Sin[t]};
```

- Se despeja z y se sustituyen x e y por su valor en función de los parámetros:

```
Solve[x^2 + y^2 + z^2 == 4, z] // Simplify
```

$$\left\{\left\{z \to -2\sqrt{1 - u^2}\right\}, \left\{z \to 2\sqrt{1 - u^2}\right\}\right\}$$

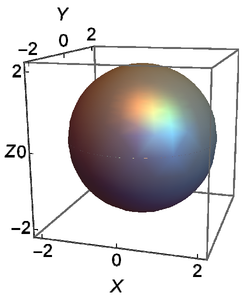
$$\left\{zn = -2\sqrt{1 - u^2},\ zp = 2\sqrt{1 - u^2}\right\};$$

- Se obtiene una parametrización para la semiesfera positiva y otra para la negativa:

$$\boxed{S_n \equiv \begin{cases} x = & 2u \cdot \cos(t) \\ y = & 2u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & -2\sqrt{1 - u^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{matrix}} \boxed{S_p \equiv \begin{cases} x = & 2u \cdot \cos(t) \\ y = & 2u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & 2\sqrt{1 - u^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{matrix}}$$

- Representación gráfica:

```
esfn = ParametricPlot3D[{x, y, zn}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];
esfp = ParametricPlot3D[{x, y, zp}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];
Show[esfn, esfp, PlotRange → All, Ticks → {{-2, 0, 2}, {-2, 0, 2}, {-2, 0, 2}}]
```



Elipsoides

Ecuación canónica:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \forall\ a,b,c\in\mathbb{R}-\{0\}}$$

Ecuaciones paramétricas de las secciones negativa y positiva:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & a\cdot u\cdot\cos(t) \\ y = & b\cdot u\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z = & -c\sqrt{1-u^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l}\forall\ t\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}\\ \forall\ u\in[0,1]\subset\mathbb{R}\end{array} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & a\cdot u\cdot\cos(t) \\ y = & b\cdot u\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z = & c\sqrt{1-u^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l}\forall\ t\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}\\ \forall\ u\in[0,1]\subset\mathbb{R}\end{array}$$

```
{x = a*u*Cos[t], y = b*u*Sin[t]};

Solve[x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 == 1, z] // Simplify
```

$$\left\{\left\{z\to-\sqrt{-c^2\left(-1+u^2\right)}\right\},\left\{z\to\sqrt{-c^2\left(-1+u^2\right)}\right\}\right\}$$

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente el elipsoide: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$

- Parametrización:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & 3\,u\cdot\cos(t) \\ y = & 2\,u\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z = & -\sqrt{1-u^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l}\forall\ t\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}\\ \forall\ u\in[0,1]\subset\mathbb{R}\end{array} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & 3\,u\cdot\cos(t) \\ y = & 2\,u\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z = & \sqrt{1-u^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l}\forall\ t\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}\\ \forall\ u\in[0,1]\subset\mathbb{R}\end{array}$$

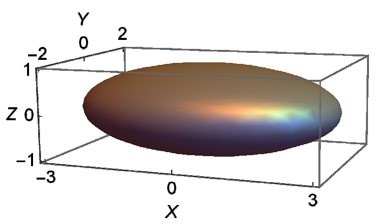
```
{x = 3 u*Cos[t], y = 2 u*Sin[t]};

Solve[x^2/9 + y^2/4 + z^2 == 1, z] // Simplify
```

$$\left\{\left\{z\to-\sqrt{1-u^2}\right\},\left\{z\to\sqrt{1-u^2}\right\}\right\}$$

```
{zn = -Sqrt[1 - u^2], zp = Sqrt[1 - u^2]};
```

- Representación gráfica:

```
elin = ParametricPlot3D[{x, y, zn}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];

elip = ParametricPlot3D[{x, y, zp}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];

Show[elip, elin, PlotRange → All, Ticks → {{-3, 0, 3}, {-2, 0, 2}, {-1, 0, 1}}]
```



Casos particulares:

- Elipsoide de revolución cuando $a=b$ (ó $a=c$ ó $c=b$)

- Esfera de radio R cuando $a = b = c = R$
  - Ecuación canónica:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \forall\, R \in \mathbb{R}}$$

  - Ecuaciones paramétricas:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & R \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & R \cdot u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & -R \cdot \sqrt{1-u^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{matrix} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & R \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & R \cdot u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & R \cdot \sqrt{1-u^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

Hiperboloide hiperbólico (o de una hoja)

Ecuación canónica:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

Ecuaciones paramétricas de las secciones negativa y positiva con altura h:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & a \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & b \cdot u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & -c\sqrt{u^2-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [1, h] \subset \mathbb{R} \end{matrix} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & a \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & b \cdot u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & c\sqrt{u^2-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [1, h] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

Debe tenerse en cuenta que $u \notin (-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

```
{x = a*u*Cos[t], y = b*u*Sin[t]};

Solve[x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 == 1, z] // Simplify
```

$$\left\{\left\{z \to -i\, c \sqrt{1-u^2}\right\}, \left\{z \to i\, c \sqrt{1-u^2}\right\}\right\}$$

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente, con $h = 2$, el elipsoide: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$

- Parametrización:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & 3\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2\,u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & -\sqrt{u^2-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [1, 2] \subset \mathbb{R} \end{matrix} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & 3\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2\,u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & \sqrt{u^2-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [1, 2] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

```
{x = 3 u*Cos[t], y = 2 u*Sin[t]};

Solve[x^2/9 + y^2/4 - z^2 == 1, z] // Simplify
```

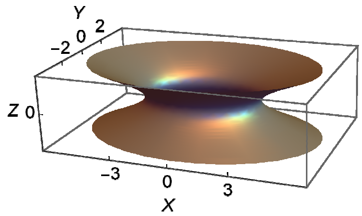
$$\left\{\left\{z \to -\sqrt{-1+u^2}\right\}, \left\{z \to \sqrt{-1+u^2}\right\}\right\}$$

```
{zn = -Sqrt[u^2 - 1], zp = Sqrt[u^2 - 1]};
```

- Representación gráfica:

```
hin = ParametricPlot3D[{x, y, zn}, {t, 0, 2 π}, {u, 1, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];
```

```
hip = ParametricPlot3D[{x, y, zp}, {t, 0, 2 π}, {u, 1, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
  AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];

Show[hip, hin, PlotRange → All, Ticks → {{-3, 0, 3}, {-2, 0, 2}, {-2, 0, 2}}]
```



Casos particulares:

- Hiperboloide de revolución cuando $a = b$ (ó $a = c$ ó $c = b$)

Conos

Ecuación canónica:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

Ecuaciones paramétricas de las secciones negativa y positiva con altura h:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & a \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & b \cdot u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & -c \cdot u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, h] \subset \mathbb{R} \end{matrix} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & a \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & b \cdot u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & c \cdot u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, h] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

```
{x = a*u*Cos[t], y = b*u*Sin[t]};

Solve[x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 == 0, z] // Simplify
{{z → -c u}, {z → c u}}
```

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente, con $h = 2$, el cono: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0$

- Parametrización:

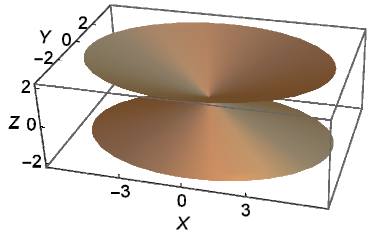
$$S_n \equiv \begin{cases} x = & 3\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2\,u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & -\,u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{matrix} \qquad S_p \equiv \begin{cases} x = & 3\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2\,u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

```
{x = 3 u*Cos[t], y = 2 u*Sin[t]};

Solve[x^2/9 + y^2/4 - z^2 == 0, z] // Simplify
{{z → -u}, {z → u}}

{zn = - u, zp = u};
```

- Representación gráfica:

```
con = ParametricPlot3D[{x, y, zn}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
  AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];

cop = ParametricPlot3D[{x, y, zp}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
  AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];
```

```
Show[cop, con, PlotRange → All, Ticks → {{-3, 0, 3}, {-2, 0, 2}, {-2, 0, 2}}]
```



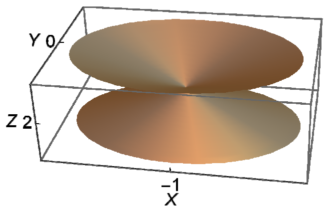
- Si quiere realizarse una traslación del vértice del cono, por ejemplo, al punto $V = (-1, 0, 2)$ basta con sumar esas coordenadas a las correspondientes ecuaciones paramétricas:
  - Parametrización:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & -1 + 3\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2\,u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & 2 - u \end{cases} \quad \begin{array}{c} \forall\, t \in [0, 2\,\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{array} \quad S_p \equiv \begin{cases} x = & -1 + 3\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2\,u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & 2 + u \end{cases} \quad \begin{array}{c} \forall\, t \in [0, 2\,\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

```
{x = -1 + 3 u * Cos[t], y = 2 u * Sin[t], zn = 2 - u, zp = 2 + u};

con = ParametricPlot3D[{x, y, zn}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];

cop = ParametricPlot3D[{x, y, zp}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];
```

  - Representación gráfica:

```
Show[cop, con, PlotRange → All, Ticks → {{-1}, {0}, {2}}]
```



Casos particulares:

- Cono de revolución cuando $a = b$ (ó $a = c$ ó $c = b$)

Paraboloides elípticos

Ecuación canónica:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{S \equiv \begin{cases} x = & a \cdot u \cdot \cos(t) \\ y = & b \cdot u \cdot \mathrm{sen}(t) \\ z = & u^2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \forall\, t \in [0, 2\,\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, h] \subset \mathbb{R} \end{array}}$$

```
{x = a * u * Cos[t], y = b * u * Sin[t]};

Solve[x^2/a^2 + y^2/b^2 - z == 0, z] // Simplify
```

$\{\{z \to u^2\}\}$

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente, con $h = 2$, el paraboloide: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z=0$

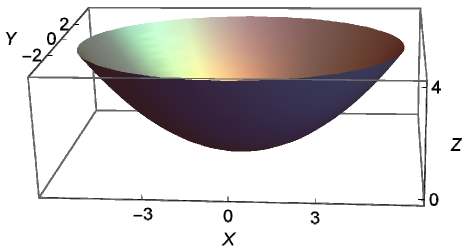
- Parametrización:

$$S_n \equiv \begin{cases} x = & 3\,u\cdot\cos(t) \\ y = & 2\,u\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z = & u^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

```
{x = 3 u * Cos[t], y = 2 u * Sin[t]};

Solve[x^2/9 + y^2/4 - z == 0, z] // Simplify
{{z → u²}}

z = u^2;
```

- Representación gráfica:

```
pare = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];

Show[pare, PlotRange → All, Ticks → {{-3, 0, 3}, {-2, 0, 2}, {0, 4}}]
```



Casos particulares:

- Paraboloide de revolución cuando $a = b$
- Paraboloide invertido cuando $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z=0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}-\{0\}}$

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente, con $h = 2$, el paraboloide: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z=0$

- Parametrización:

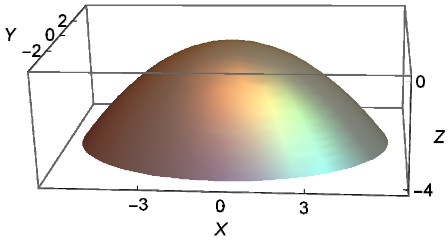
$$S_n \equiv \begin{cases} x = & 3\,u\cdot\cos(t) \\ y = & 2\,u\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z = & -u^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

```
{x = 3 u * Cos[t], y = 2 u * Sin[t]};

Solve[x^2/9 + y^2/4 + z == 0, z] // Simplify
{{z → -u²}}

z = -u^2;
```

- Representación gráfica:

```
pare2 = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]]];
```

```
Show[pare2, PlotRange → All, Ticks → {{-3, 0, 3}, {-2, 0, 2}, {-4, 0}}]
```



Cilindros

Se trataron en el tema anterior.

Ecuación canónica:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

Ecuaciones paramétricas con altura h:

$$\boxed{S \equiv \begin{cases} x = & a \cdot \cos(t) \\ y = & b \cdot \text{sen}(t) \\ z = & u \end{cases} \quad \begin{array}{c} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, h] \subset \mathbb{R} \end{array}}$$

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente, con $h = 2$, el cilindro: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

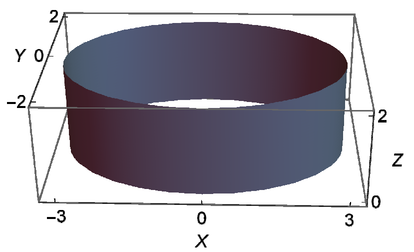
- Parametrización:

$$S \equiv \begin{cases} x = & 3\cos(t) \\ y = & 2\,\text{sen}(t) \\ z = & u \end{cases} \quad \begin{array}{c} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

```
{x = 3 * Cos[t], y = 2 * Sin[t], z = u};
```

- Representación gráfica:

```
cil = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
  AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[1], Specularity[White, 30]],
  Ticks → {{-3, 0, 3}, {-2, 0, 2}, {0, 2}}]
```



Casos particulares:

- Cilindro de revolución cuando $a = b$

Definición

Una superficie de revolución es aquella generada por una curva plana, cerrada o no y denominada generatriz o meridiana, que gira alrededor de una recta fija, llamada eje de rotación, situada en el mismo plano que la línea generatriz.

Cada punto $P = (x, y, z)$ de la meridiana describe circunferencias, llamadas paralelos, en planos ortogonales al eje de rotación.

Parametrización

Como se indicó al introducir el tema, se considera como eje de giro preferentemente el Oz que es el más habitual en este tipo de elementos constructivos.

Así mismo, se plantea un sistema de referencia tal que la curva que gira se encuentre en uno de los planos coordenados, Oxz ó Oyz.

Si la meridiana está definida en Oxz, se obtienen las ecuaciones paramétricas de las coordenadas x y z de dicha curva en función de un parámetro u. La revolución alrededor del eje Oz se consigue multiplicando las coordenadas x e y, respectivamente, por las funciones trigonométricas $\cos(t)$ y $\operatorname{sen}(t)$ $\forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$. Al tratarse de una superficie de revolución la coordenada y coincide con la x.

$$\boxed{\begin{cases} x(t,u) = & f(u)\cdot\cos(t) \\ y(t,u) = & f(u)\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z(t,u) = & g(u) \end{cases}}$$

La variación de u depende, evidentemente, de la línea parametrizada.

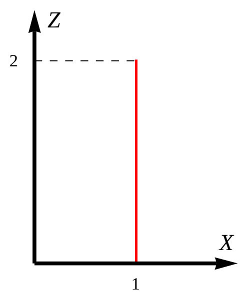
Si la línea meridiana está definida en Oyz, se procede de forma análoga.

Cuádricas

En el apartado anterior se indicó la existencia de superficies cuádricas de revolución.

Mediante ejemplos, se presentan algunas de ellas. En los ejercicios propuestos de este tema se plantea la generación de otras diferentes.

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente el cilindro de revolución generado, al girar alrededor del eje Oz, por el siguiente segmento de recta:



- Parametrización de la línea que gira:

$$\begin{cases} x(u) = & 1 \\ y(u) = & 0 \\ z(u) = & u \end{cases} \quad \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R}$$

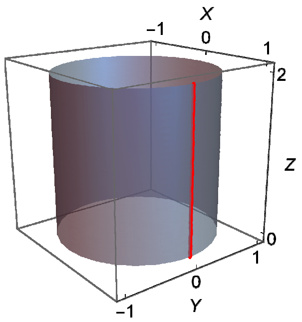
- Parametrización del cilindro de revolución:

$$\begin{cases} x(t,u) = & 1\cdot\cos(t) \\ y(t,u) = & 1\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z(t,u) = & u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

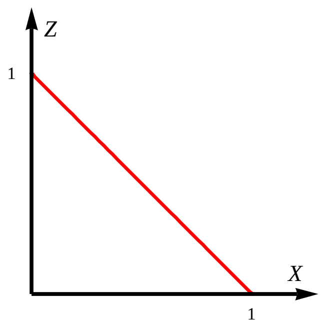
```
{x = 1*Cos[t], y = 1*Sin[t], z = u};
```

- Representación gráfica:

```
cil = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];
lin = ParametricPlot3D[{1, 0, u}, {u, 0, 2}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Red]];
Show[cil, lin, PlotRange → All, Ticks → {{-1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 2}}]
```



Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente el cono de revolución generado, al girar alrededor del eje Oz, por el siguiente segmento de recta:



- Parametrización de la línea que gira:

$$\begin{cases} x(u) = & 1-u \\ y(u) = & 0 \\ z(u) = & u \end{cases} \quad \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

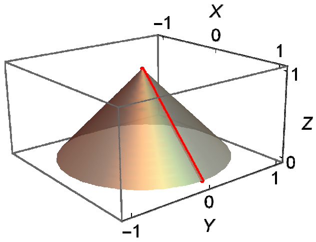
- Parametrización del cono de revolución:

$$\begin{cases} x(t,u) = & (1-u)\cdot\cos(t) \\ y(t,u) = & (1-u)\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z(t,u) = & u \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

```
{x = (1 - u) * Cos[t], y = (1 - u) * Sin[t], z = u};
```

- Representación gráfica:

```
con = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[0.8], Specularity[White, 30]]];
lin = ParametricPlot3D[{1 - u, 0, u}, {u, 0, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Red]];
Show[con, lin, PlotRange → All, Ticks → {{-1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 1}}]
```



Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente el elipsoide de revolución, centrado en $P=(9,1,3)$, generado por una elipse de semiejes $a=5$ y $c=2$, al girar alrededor del eje Oz.

- Parametrización de la elipse que gira centrándola en el origen de coordenadas:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(u) = & 5\cdot\cos(u) \\ y(u) = & 0 \\ z(u) = & 2\cdot\operatorname{sen}(u) \end{array}\right. \quad \forall\, u\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}$$

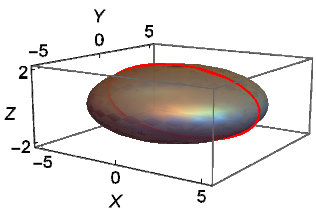
- Parametrización del elipsoide de revolución:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(t,u) = & 5\cdot\cos(u)\cdot\cos(t) \\ y(t,u) = & 5\cdot\cos(u)\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z(t,u) = & 2\cdot\operatorname{sen}(u) \end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\forall\, t\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R} \\ \forall\, u\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}\end{array}$$

```
{x = 5 * Cos[u] * Cos[t], y = 5 * Cos[u] * Sin[t], z = 2 Sin[u]};
```

- Representación gráfica:

```
elip = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[0.8], Specularity[White, 30]]];
eli = ParametricPlot3D[{5 Cos[u], 0, 2 Sin[u]}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False,
   Boxed → True, AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Red]];
Show[elip, eli, PlotRange → All, Ticks → {{-5, 0, 5}, {-5, 0, 5}, {-2, 2}}]
```



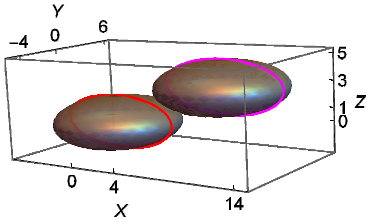
- Parametrización del elipsoide de revolución centrado en $P=(9,1,3)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(t,u) = & 9+5\cdot\cos(u)\cdot\cos(t) \\ y(t,u) = & 1+5\cdot\cos(u)\cdot\operatorname{sen}(t) \\ z(t,u) = & 3+2\cdot\operatorname{sen}(u) \end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\forall\, t\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R} \\ \forall\, u\in[0,2\pi]\subset\mathbb{R}\end{array}$$

```
{x = 9 + 5 * Cos[u] * Cos[t], y = 1 + 5 * Cos[u] * Sin[t], z = 3 + 2 Sin[u]};
```

- Representación gráfica de ambos elipsoides:

```
elip2 = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[0.8], Specularity[White, 30]]];
eli2 = ParametricPlot3D[{9 + 5 Cos[u], 1, 3 + 2 Sin[u]}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False,
   Boxed → True, AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Magenta]];
Show[elip2, eli2, eli, elip, PlotRange → {{-5, 14}, {-5, 6}, {-2, 5}},
 Ticks → {{4, 0, 14}, {-4, 0, 6}, {0, 1, 3, 5}}]
```



Toros

Un toro es la superficie de revolución generada por una circunferencia (meridiana) que gira alrededor de un eje situado en su mismo plano y no la corta.

La parametrización es análoga a la explicada anteriormente.

Ejemplo. Parametrizar y representar gráficamente el toro generado por una circunferencia, centrada en $P = (4, 0, 0)$ y radio $R = 2$, al girar alrededor del eje Oz.

- Parametrización de la circunferencia que gira:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(u) = & 4 + 2 \cdot \cos(u) \\ y(u) = & 0 \\ z(u) = & 2 \cdot \operatorname{sen}(u) \end{array}\right. \quad \forall\, u \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$$

- Parametrización del toro:

$$\left\{\begin{array}{ll} x(t, u) = & [4 + 2 \cdot \cos(u)] \cdot \cos(t) \\ y(t, u) = & [4 + 2 \cdot \cos(u)] \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z(t, u) = & 2 \cdot \operatorname{sen}(u) \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \\ \forall\, u \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

```
{x = (4 + 2 * Cos[u]) * Cos[t], y = (4 + 2 * Cos[u]) * Sin[t], z = 2 Sin[u]};
```

- Representación gráfica:

```
toro = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 π}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False, Boxed → True,
   AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Gray, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];
cir = ParametricPlot3D[{4 + 2 * Cos[u], 0, 2 Sin[u]}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False,
   Boxed → True, AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Red]];
Show[toro, cir, PlotRange → All, Ticks → {{-3, 0, 5}, {-3, 0, 3}, {-2, 2}}]
```