eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Autoevaluación

OCW 2020: *Parametrización y representación gráfica de superficies construidas*

Test nº3 (resolución)

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Barrallo Calonge, Javier

Soto Merino, Juan Carlos

Lecubarri Alonso, Inmaculada

Departamento de Matemática Aplicada

Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB/BIE)

ETS de Arquitectura de Donostia-San Sebastián (ETSASS/DAGET)

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN: Test nº3

Ejercicio nº1

Enunciado

Clasifique el tipo de superficie cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = & 4\,\text{sen}\,(t)\cdot\cos\,(u) \\ y = & 2\,\text{sen}\,(t)\cdot\text{sen}\,(u) \\ z = & \cos\,(t) \end{cases} \quad \forall\, t,\, u \in [0,\, 2\,\pi] \subset \mathbb{R}$$

Resolución

```
Remove["Global`*"] (* Borrado de variables utilizadas *)
```

- eliminando los parámetros t, u se obtiene la ecuación implícita de la superficie:

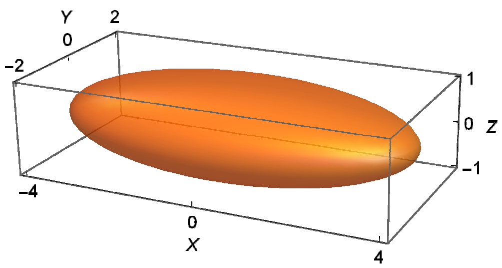
```
Eliminate[{x == 4 Sin[t] * Cos[u], y == 2 Sin[t] * Sin[u], z == Cos[t]}, {t, u}] // Simplify // Factor
```

Eliminate: Inverse functions are being used by Eliminate, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

$x^2 + 4\,y^2 + 16\,z^2 == 16$

- se trata de la ecuación de un elipsoide centrado en el origen y semiejes $a = 4$, $b = 2$ y $c = 1$ en x, y, z, respectivamente
  - ecuación implícita: $S_1 \equiv F\,(x,\, y,\, z) = x^2 + 4\,y^2 + 16\,z^2 - 16 = 0$
  - forma canónica: $S_1 \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$
- representación gráfica a partir de la ecuación implícita

```
elip1 = ContourPlot3D[x^2 + 4 y^2 + 16 z^2 == 16, {x, -4, 4}, {y, -2, 2}, {z, -1, 1}, Mesh → False, Boxed → True,
  AxesLabel → {X, Y, Z}, BoxRatios → Automatic, Ticks → {{-4, 0, 4}, {-2, 0, 2}, {-1, 0, 1}},
  ContourStyle → Directive[Orange, Opacity[0.6], Specularity[White, 30]]]
```

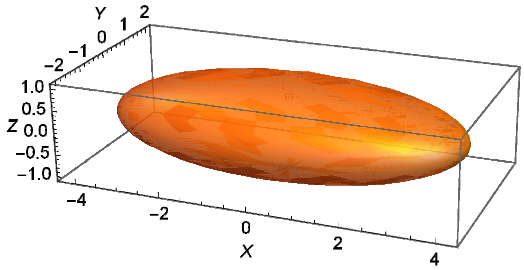


- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$
- puede responderse a la cuestión representando gráficamente la superficie
- definición de ecuaciones paramétricas de la superficie

```
S1 = {x = 4 Sin[t] * Cos[u], y = 2 Sin[t] * Sin[u], z = Cos[t]};
```

- representación gráfica a partir de las ecuaciones paramétricas

```
gs1 = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 Pi}, {u, 0, 2 Pi}, Mesh → False, Boxed → True,
  AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Orange, Opacity[0.6], Specularity[White, 30]]]
```



Ejercicio nº2

Enunciado

Calcule la ecuación implícita de la superficie reglada cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$S_2 \equiv \begin{cases} x = & t\cdot z + t + 1 \\ y = & 2\,t\cdot z + 3\,t - 1 \\ z = & z \end{cases} \quad \forall\, t, z \in \mathbb{R}$$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- eliminando los parámetros t, u se obtiene la ecuación implícita de la superficie:

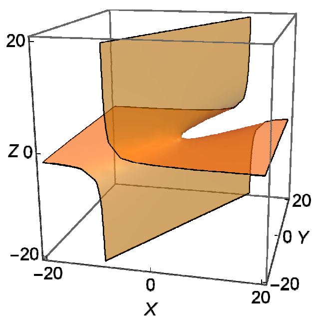
```
Eliminate[{x == t*z + t + 1, y == 2 t*z + 3 t - 1}, {t, u}] // Simplify // Factor
```

```
4 + y + 3 z + y z == x (3 + 2 z)
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{f}}$

- representación gráfica a partir de la ecuación implícita

```
reg2 = ContourPlot3D[4 + y + 3 z + y z == x (3 + 2 z), {x, -20, 20},
  {y, -20, 20}, {z, -20, 20}, Mesh → False, Boxed → True, AxesLabel → {X, Y, Z},
  BoxRatios → Automatic, Ticks → {{-20, 0, 20}, {-20, 0, 20}, {-20, 0, 20}},
  ContourStyle → Directive[Orange, Opacity[0.6], Specularity[White, 30]]]
```



Ejercicio nº3

Enunciado

Se considera la superficie reglada cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$S_3 \equiv \begin{cases} x = & t \cdot z + t + 1 \\ y = & 2\,t \cdot z + 3\,t - 1 \\ z = & z \end{cases} \quad \forall\ t,\, z \in \mathbb{R}$$

Halle el punto de intersección $P = \left(z = \sqrt{3}\right) \cap g_1$ siendo g_1 la generatriz correspondiente al valor del parámetro $t = 1$. Obtenga el resultado con cinco cifras significativas.

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

```
N[{x == t*z + t + 1, y == 2 t*z + 3 t - 1, c == z} /. {t → 1, z → √3}, 5]
```

```
{x == 3.7321, y == 5.4641, c == 1.7321}
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{e}}$

Ejercicio nº4

Enunciado

Calcule la ecuación implícita de la superficie reglada cuyas generatrices verifican las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$S_4 \equiv \begin{cases} x = & 3\,\lambda \cdot \cos(t) \\ y = & 3\,\lambda \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & 4\,\lambda \end{cases} \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ t \in [0,\, 2\,\pi] \subset \mathbb{R}$$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- eliminando los parámetros λ, t se obtiene la ecuación implícita de la superficie:

```
Eliminate[{x == 3 λ*Cos[t], y == 3 λ*Sin[t], z == 4 λ}, {λ, t}] // Simplify
```

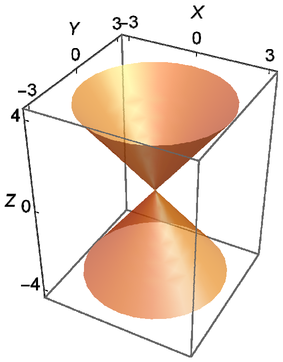
··· Eliminate: Inverse functions are being used by Eliminate, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

$$9\,z^2 == 16\,\left(x^2 + y^2\right) \,\&\&\, \frac{9\,x\,z^2}{4\,\left(x^2 + y^2\right)} == 4\,x$$

- se trata de la ecuación de un cono de revolución con vértice en el origen y eje Oz
  - ecuación implícita: $S_4 \equiv F(x,\, y,\, z) = 16\left(x^2 + y^2\right) - 9\,z^2 = 0$
  - forma canónica: $S_4 \equiv \frac{9}{16}\,z^2 = x^2 + y^2$
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

- representación gráfica a partir de las ecuaciones paramétricas

```
ParametricPlot3D[{3λ*Cos[t], 3λ*Sin[t], 4λ}, {t, 0, 2Pi}, {λ, -1, 1},
 Ticks → {{-3, 0, 3}, {-3, 0, 3}, {-4, 0, 4}}, Mesh → False, Boxed → True,
 AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotStyle → Directive[Orange, Opacity[0.6], Specularity[White, 30]]]
```



Ejercicio nº5

Enunciado

Indique la parametrización de la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Ox y se apoyan en la curva directriz:

$$C_5 \equiv \begin{cases} yz = & 1 \\ x = & 1 \end{cases} \quad \forall\, y \in \left[\frac{1}{4}, 4\right] \subset \mathbb{R}$$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- se trata de un arco de hipérbola contenida en el plano $x = 1$
- parametrización de la curva

```
hip = {xh[t_] = 1, yh[t_] = t, zh[t_] = 1/t}
```

```
{1, t, 1/t}
```

$$C_5 \equiv \begin{cases} x(t) = & 1 \\ y(t) = & t \\ z(t) = & \frac{1}{t} \end{cases} \quad \forall\, t \in \left[\frac{1}{4}, 4\right] \subset \mathbb{R}$$

- parametrización de la superficie cilíndrica hiperbólica

$$S_5 \equiv \begin{cases} x(t, u) = & u \\ y(t, u) = & t \\ z(t, u) = & \frac{1}{t} \end{cases} \quad \forall\, t \in \left[\frac{1}{4}, 4\right] \subset \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathbb{R}$$

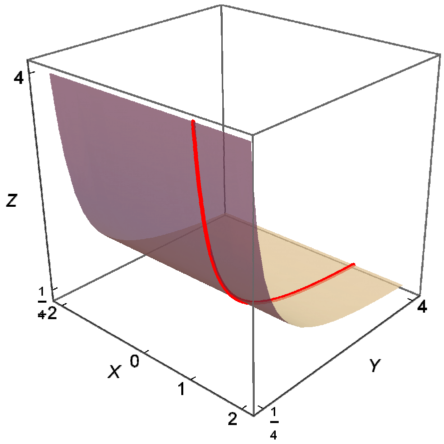
```
{x = u, y = yh[t], z = zh[t]};
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$
- representación gráfica

```
hip5 = ParametricPlot3D[hip, {t, 1/4, 4},
   PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]}, PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];
```

```
cilh = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 1/4, 4}, {u, -2, 2}, Mesh → False,
   Boxed → True, Ticks → {{-2, 0, 1, 2}, {1/4, 4}, {1/4, 4}}, AxesLabel → {X, Y, Z},
   PlotStyle → Directive[LightBlue, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];
```

```
Show[cilh, hip5, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



Ejercicio nº6

Enunciado

Indique la parametrización de la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{e} = (1, -1, 0)$ y se apoyan en la curva directriz:

$$C_6 \equiv \begin{cases} y + z^2 = & 1 \\ x = & -1 \end{cases} \quad \forall\ y \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- se trata de un arco de parábola contenida en el plano $x = -1$
- parametrización de la curva

```
c6 = {x[t_] = -1, y[t_] = 1 - t^2, z[t_] = t};
```

$$C_6 \equiv \begin{cases} x(t) = & -1 \\ y(t) = & 1 - t^2 \\ z(t) = & t \end{cases} \quad \forall\ t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

- parametrización de la superficie cilíndrica parabólica

$$S_6 \equiv \begin{cases} x(t, u) = & -1 + u \\ y(t, u) = & 1 - t^2 - u \\ z(t, u) = & t \end{cases} \quad \forall\ t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R},\ \forall\ u \in \mathbb{R}$$

```
{x = -1 + u, y = y[t] - u, z = z[t]}
```

$\{-1 + u,\ 1 - t^2 - u,\ t\}$

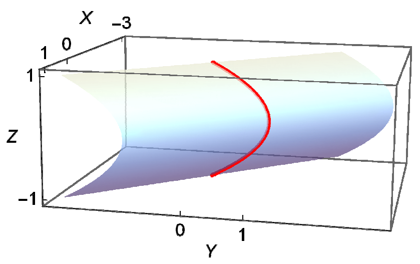
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{a}}$

- representación gráfica

```
p6 = ParametricPlot3D[c6, {t, -1, 1},
   PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]}, PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];

cilp6 = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, -1, 1}, {u, -2, 2}, Mesh → False,
   Boxed → True, Ticks → {{-3, 0, 1}, {0, 1}, {-1, 1}}, AxesLabel → {X, Y, Z},
   PlotStyle → Directive[LightBlue, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];

Show[cilp6, p6, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



Ejercicio nº7

Enunciado

Indique la parametrización de la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{e} = (1, -1, 2)$ y se apoyan en el primer arco de una cicloide generada por una circunferencia de radio $R = 2$ y situado en el plano $z = 2$.

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- parametrización de la curva

```
c7 = {xc[t_] = 2 (t - Sin[t]), yc[t_] = 2 (1 - Cos[t]), zc[t_] = 2};
```

$$C_7 \equiv \begin{cases} x(t) = & 2(t - \operatorname{sen}(t)) \\ y(t) = & 2(1 - \cos(t)) \\ z(t) = & 2 \end{cases} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$$

- parametrización de la superficie cilíndrica

$$S_7 \equiv \begin{cases} x(t) = & 2(t - \operatorname{sen}(t)) + u \\ y(t) = & 2(1 - \cos(t)) - u \\ z(t) = & 2(1 + u) \end{cases} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathbb{R}$$

```
{x = xc[t] + u, y = yc[t] - u, z = zc[t] + 2 u}

{u + 2 (t - Sin[t]), -u + 2 (1 - Cos[t]), 2 + 2 u}
```

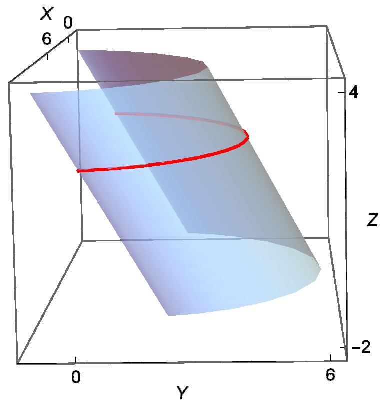
- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$

- representación gráfica

```
g7 = ParametricPlot3D[c7, {t, 0, 2 Pi},
   PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]}, PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];

cil7 = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 Pi}, {u, -2, 1},
   Mesh → False, Boxed → True, Ticks → {{0, 6}, {0, 6}, {-2, 4}}, AxesLabel → {X, Y, Z},
   PlotStyle → Directive[LightBlue, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];

Show[cil7, g7, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



Ejercicio nº8

Enunciado

Indique la tercera coordenada, z, de las ecuaciones paramétricas de la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{e} = (1, 1, -2)$ y se apoyan en la curva:

$$C(t) = \left(1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}},\ 1 - \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}},\ \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}}\right) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- la curva ya está dada en forma paramétrica

```
c8 = {xc[t_] = 1 + Cos[t]/√3 + Sin[t]/√2, yc[t_] = 1 - Cos[t]/√3 + Sin[t]/√2, zc[t_] = Sin[t]/√2};
```

- parametrización de la superficie cilíndrica

$$S(t, u) = \left(1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}} + u,\ 1 - \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}} + u,\ \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{2}} - 2u\right) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi],\ \forall\, u \in \mathbb{R}$$

```
{x = xc[t] + u, y = yc[t] + u, z = zc[t] - 2 u}
```

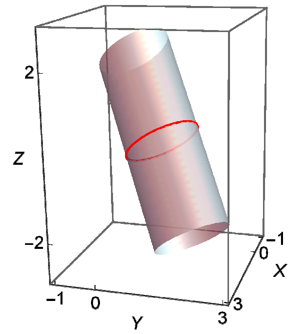
$$\left\{1 + u + \frac{\text{Cos}[t]}{\sqrt{3}} + \frac{\text{Sin}[t]}{\sqrt{2}},\ 1 + u - \frac{\text{Cos}[t]}{\sqrt{3}} + \frac{\text{Sin}[t]}{\sqrt{2}},\ -2u + \frac{\text{Sin}[t]}{\sqrt{2}}\right\}$$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } e}$
  - representación gráfica

```
g8 = ParametricPlot3D[c8, {t, 0, 2 Pi},
   PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]}, PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];
```

```
cil8 = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 Pi}, {u, -1, 1}, Mesh → False,
   Boxed → True, Ticks → {{-1, 0, 3}, {-1, 0, 3}, {-2, 2}}, AxesLabel → {X, Y, Z},
   PlotStyle → Directive[LightBlue, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];

Show[cil8, g8, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



Ejercicio nº9

Enunciado

Parametrice la sección plana triangular cuyos vértices son $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 0, 2)$ y $P = (6, 0, 2)$.

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

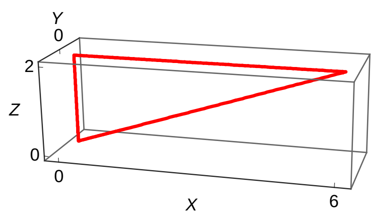
- el triángulo está situado en el plano coordenado $y = 0$
- los catetos y la hipotenusa vienen dados por los siguientes segmentos de recta

$$b \equiv \begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \end{cases} \forall\, z \in [0, 2] \qquad c \equiv \begin{cases} y = & 0 \\ z = & 2 \end{cases} \forall\, x \in [0, 6] \qquad h \equiv \begin{cases} x = & 3\,z \\ y = & 0 \end{cases} \forall\, z \in [0, 2]$$

- representación gráfica del triángulo especificado

```
b = ParametricPlot3D[{0, 0, t}, {t, 0, 2},
   PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]}, PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];
c = ParametricPlot3D[{t, 0, 2}, {t, 0, 6}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]},
   PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];
h = ParametricPlot3D[{3 t, 0, t}, {t, 0, 2}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]},
   PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic];

triang = Show[b, c, h, Ticks → {{0, 6}, {0}, {0, 2}}, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



- debe plantearse una parametrización que cubra todo el dominio limitado entre esas líneas

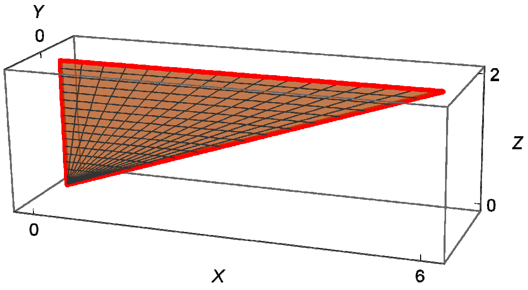
$$S_9 \equiv \begin{cases} x = & 3\,u \cdot t \\ y = & 0 \\ z = & t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t \in [0, 2] \\ u \in [0, 1] \end{array}$$

```
{x = 3 u*t, y = 0, z = t};
```

- representación gráfica de la sección

```
sectriang = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2}, {u, 0, 1},
   Mesh → True, Boxed → True, Ticks → {{3}, {0, 10}, {0, 5}}, AxesLabel → {X, Y, Z},
   PlotStyle → Directive[Orange, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];
```

```
Show[triang, sectriang, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



- Solución: Opción ***e***

Ejercicio nº10

Enunciado

Parametrice la sección circular del plano $z = 0$ con centro en $P = (2, 2, 0)$ y radio $R = 2$.

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

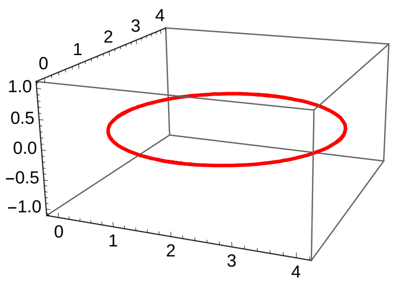
- el círculo está situado en el plano coordenado $z = 0$
- parametrización de la circunferencia que delimita el círculo

$$C \equiv \begin{cases} x = & 2 + 2\cos(t) \\ y = & 2 + 2\,\mathrm{sen}(t) \\ z = & 0 \end{cases} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

```
{x[t_] = 2 + 2 Cos[t], y[t_] = 2 + 2 Sin[t], z[t_] = 0};
```

- representación gráfica de la circunferencia

```
c10 = ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotStyle → {Red, Thickness[0.010]}, PlotPoints → 100, BoxRatios → Automatic]
```



- debe plantearse una parametrización que cubra todo el dominio limitado entre esas líneas

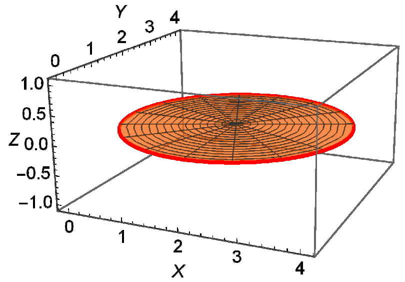
$$S_{10} \equiv \begin{cases} x = & 2 + 2\,u \cdot \cos(t) \\ y = & 2 + 2\,u \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z = & 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} t \in [0,\, 2\,\pi] \\ u \in [0,\, 1] \end{matrix}$$

```
{x = 2 + 2 u * Cos[t], y = 2 + 2 u * Sin[t], z = 0};
```

- representación gráfica

```
seccirc = ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2 Pi}, {u, 0, 1},
   Mesh → True, Boxed → True, Ticks → {{3}, {0, 10}, {0, 5}}, AxesLabel → {X, Y, Z},
   PlotStyle → Directive[Orange, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]];
```

```
Show[c10, seccirc, PlotRange → All, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{f}}$