



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

TAREA 2

EJERCICIOS

Los ejercicios lo son a la vez de repaso de nociones simples de álgebra lineal y de manejo de \mathbb{R} . Siempre que sea posible, debe darse un argumento o demostración analítica del hecho que se pide comprobar, además de realizar los cálculos. Adjunta un listado con los cálculos realizados **debidamente anotados y comentados**.

1. Crea en \mathbb{R} la siguiente matriz X de orden 5×3 .

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Forma la matriz $X'X$. ¿Es siempre diagonalizable? Si lo es, ¿cuáles son sus vectores y valores propios? Conserva unos y otros para utilización posterior.

2. ¿Es de rango completo la matriz $X'X$? ¿Qué te permite llegar a esta conclusión? ¿Existe la matriz $(X'X)^{-1}$? Si existe, compútala y guárdala para uso posterior.
3. Computa $X(X'X)^{-1}X'$. ¿Qué orden tiene? ¿Es simétrica? ¿Idempotente? ¿Cuáles son sus valores propios?
4. Computa $I - X(X'X)^{-1}X'$. Repite las operaciones en el apartado anterior.
5. ¿Existe $[X(X'X)^{-1}X']^{-1}$? ¿Qué te permite llegar a tal conclusión? ¿Existe la matriz

$$(I - X(X'X)^{-1}X')^{-1}?$$

6. Haciendo uso de la matriz $X'X$ y de los vectores y valores propios obtenidos en el apartado 2, encuentra una matriz B tal que $BB' = X'X$ (una especie de “raíz cuadrada” de la matriz $X'X$). (Ayuda: en la Tarea 1 se te preguntó también esto. Recuerda que si $V'(X'X)V = \Gamma$, $(X'X) = V\Gamma V'$, siendo Γ una matriz diagonal con los valores propios de $(X'X)$ en la diagonal principal, y V una matriz ortogonal.)
7. Toma un vector arbitrario \vec{y} en \mathbb{R}^3 , y calcula:

$$\vec{u} = X(X'X)^{-1}X'\vec{y} \quad (1)$$

$$\vec{v} = [I - X(X'X)^{-1}X']\vec{y} \quad (2)$$

Guarda \vec{u} y \vec{v} .

8. Calcula $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ con los vectores computados en el apartado anterior. ¿Qué observas? ¿Por qué?

9. Calcula $\|\vec{y}\|^2$, $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$. ¿Qué observas? ¿Por qué?
10. Volviendo al problema 6, ¿es B única? Demuestra, en su caso, que lo es, o proporciona una B^* alternativa. (Ayuda: investiga lo que es la llamada factorización de Cholesky, por ejemplo.)

AYUDAS, SUGERENCIAS Y COMPLEMENTOS

1. En R, la función `det` da directamente el determinante. Para computar inversas generalizadas, dispones de `ginv` en la librería MASS.
2. En R el modo de cargar una librería conteniendo funciones adicionales a las standard es mediante un mandato como: `library(nombre)`, donde “nombre” es el nombre de la librería. Naturalmente, ha de estar instalada en el sistema sobre el que trabajas. Verás dónde encontrar las librerías disponibles y cómo instalarlas en clases prácticas (aunque no necesitas instalar nada si trabajas en el LEC).
3. Recuerda que, además de contar con los manuales, puedes en todo momento pedir ayuda al sistema para averiguar la sintaxis y funcionamiento de una función. Por ejemplo, `help(diag)` te dirá cuanto necesitas saber sobre la función `diag`. También invocar `help.start()` y mantener abierta la ayuda en una ventana aparte, o buscar ayuda sobre alguna cuestión con `help.search()`.

Cualesquiera manuales de entre los de la bibliografía te serán de utilidad; por ejemplo, [8], [7] o [5] para cuestiones relacionadas con regresión. Para cuestiones relacionadas con R, tienes [3] o [9], que son buenas introducciones a la Estadística utilizando R, o el “Libro Blanco” [2]. También puedes servirte de [12], de las notas [10] (traducción castellana en [11]), o de [4].

Para las cuestiones de algebra lineal y matricial puedes servirte, por ejemplo, de [6] o [1].

Referencias

- [1] K. M. Abadir and J. R. Magnus. *Matrix Algebra*. Cambridge Univ. Press, 2005.
- [2] J. M. Chambers and T. J. Hastie. *Statistical Models in S*. Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, Ca., 1992.
- [3] P. Dalgaard. *Introductory Statistics with R*. Statistics and Computing. Springer-Verlag, 2002. Signatura: 519.682 DAL.
- [4] J. H. Maindonald. Data analysis and graphics using R - An introduction. January 2000.
- [5] R. H. Myers. *Classical and Modern Regression with Applications*. PWS-KENT Pub. Co., Boston, 1990.
- [6] S. R. Searle. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. Wiley, 1982.
- [7] G. A. F. Seber. *Linear Regression Analysis*. Wiley, New York, 1977.
- [8] A. Fdez. Trocóniz. *Modelos Lineales*. Serv. Editorial UPV/EHU, Bilbao, 1987.
- [9] M.D. Ugarte, A.F. Militino, and A.T. Arnholt. *Probability and Statistics with R*. CRC Press, 2008.
- [10] B. Venables, D. Smith, R. Gentleman, and R. Ihaka. *Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics*. Dept. of Statistics, University of Adelaide and University of Auckland, 1997. Available at <http://cran.at.r-project.org/doc/R-intro.pdf>.
- [11] B. Venables, D. Smith, R. Gentleman, R. Ihaka, and M. Mächler. *Notas sobre R: Un Entorno de Programación para Análisis de Datos y Gráficos*, 2000. Traducción española de A. González y S. González.
- [12] W.N. Venables and B.D. Ripley. *Modern Applied Statistics with S-Plus*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1999.