Apéndice E

Enunciados y demostraciones formales

Se incluyen aquí teoremas, desarrollos y demostraciones omitidos en el curso de la exposición, por su nivel de formalismo o por no ser esenciales.

E.1. Existencia y unicidad de proyecciones.

Definición E.1 *Sea $\{\vec{v}_n\}$ una sucesión de vectores en H, espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales R con las operaciones "suma" de vectores y "producto" por números reales, definidas ambas del modo usual. Supongamos definido sobre H un producto interno $< \cdot, \cdot >$ y correspondiente norma $\parallel \vec{v} \parallel^2 \; = < \vec{v}, \vec{v} >$. Decimos que $\{\vec{v}_n\}$ es una* sucesión de Cauchy *si para cualquier $\delta > 0$ hay un $N(\delta)$ tal que $\forall m, n \geq N(\delta), \quad \parallel \vec{v}_n - \vec{v}_m \parallel < \delta$; es decir, si prefijado un δ arbitrariamente pequeño, existe siempre un $N(\delta)$ tal que cualesquiera vectores $\vec{v}_m, \vec{v}_n$ que aparezcan en la sucesión en lugar posterior al $N(\delta)$ distan entre sí menos de δ.*

Definición E.2 *Sea H un espacio vectorial como en la Definición E.1. Decimos que tiene estructura de espacio de Hilbert si es completo, es decir, si contiene los límites de todas las sucesiones de Cauchy de vectores en H, infinito-dimensional y separable. Cualquier subespacio vectorial de un espacio de Hilbert, es a su vez espacio de Hilbert.*

Teorema E.1 *Sea H un espacio de Hilbert, y M un subespacio del mismo. Para cualquier vector $\vec{y} \in H$ existe siempre un único vector $\vec{v} = P_M\vec{y}$, proyección de $\vec{y}$ sobre M. Se verifica que:*

$$\| \vec{y} - \vec{v} \|^2 \quad = \quad \min_{\vec{z}\in M} \| \vec{y} - \vec{z} \|^2. \tag{E.1}$$

Demostración. Veamos[1] primero la existencia. Sea $d = \min_{\vec{z}\in M} \| \vec{y} - \vec{z} \|^2$. Entonces, necesariamente existirá en M algún vector $\vec{v}_1$ tal que: $\| \vec{y} - \vec{v}_1 \|^2 \leq d + 1$; de no haberlo, $\min \| \vec{y} - \vec{z} \|^2$ tendría que ser mayor que $d + 1$, contra la hipótesis. Análogamente, para cualquier número natural n existirá $\vec{v}_n$ verificando: $\| \vec{y} - \vec{v}_n \|^2 \leq d+1/n$. Mostraremos que la sucesión $\{\vec{v}_n\}$ es de Cauchy. Mostraremos también que su límite –único– verifica las condiciones definitorias de proyección de $\vec{y}$ sobre M. Probaremos, en fin, que ningún otro vector en M distinto del límite anterior verifica las mismas condiciones, así como la propiedad de mínima distancia en el enunciado.

Sea:

$$D = \| (\vec{y} - \vec{v}_n) - (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2 + \| (\vec{y} - \vec{v}_n) + (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2 \tag{E.2}$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} D &= \| (\vec{y} - \vec{v}_n) \|^2 + \| (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2 - 2 < (\vec{y} - \vec{v}_m), (\vec{y} - \vec{v}_n) > \\ &\quad + \| (\vec{y} - \vec{v}_n) \|^2 + \| (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2 + 2 < (\vec{y} - \vec{v}_m), (\vec{y} - \vec{v}_n) > \\ &= 2\| (\vec{y} - \vec{v}_n) \|^2 + 2\| (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2. \end{aligned} \tag{E.3}$$

Por otra parte, tenemos:

$$\begin{aligned} D &= \| (\vec{v}_m - \vec{v}_n) \|^2 + \| 2\vec{y} - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)(\vec{v}_n + \vec{v}_m) \|^2 \\ &= \| (\vec{v}_m - \vec{v}_n) \|^2 + 4\| \vec{y} - \left(\tfrac{1}{2}\right)(\vec{v}_n + \vec{v}_m) \|^2. \end{aligned} \tag{E.4}$$

Igualando (E.3) y (E.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} \| \vec{v}_m - \vec{v}_n \|^2 &= 2\| \vec{y} - \vec{v}_n \|^2 + 2\| \vec{y} - \vec{v}_m \|^2 \\ &\quad -4\| \vec{y} - \left(\tfrac{1}{2}\right)(\vec{v}_n + \vec{v}_m) \|^2. \end{aligned} \tag{E.5}$$

[1]Demostración tomada de Anderson (1971). Es más general de lo que estrictamente necesitamos, pero merece la pena enunciar este Teorema así para poderlo emplear inalterado en otros contextos (por ejemplo, en predicción lineal de procesos estocásticos). Una demostración más simple y menos general puede encontrarse en Arnold (1981), pág. 34.

Como la norma al cuadrado del último término de (E.5) es al menos d, tenemos:

$$\| \vec{v}_m - \vec{v}_n \|^2 \leq 2\| (\vec{y} - \vec{v}_n) \|^2 + 2\| (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2 - 4d \tag{E.6}$$

Sea $\delta > 0$. Para m, n mayores que $N(\delta/4)$, tenemos:

$$\| (\vec{y} - \vec{v}_n) \|^2 \leq d + \delta/4 \tag{E.7}$$
$$\| (\vec{y} - \vec{v}_m) \|^2 \leq d + \delta/4. \tag{E.8}$$

Sustituyendo ésto en (E.5) obtenemos:

$$\| (\vec{v}_m - \vec{v}_n) \|^2 \leq 2(d + \delta/4) + 2(d + \delta/4) - 4d = \delta, \tag{E.9}$$

luego la sucesión $\{\vec{v}_n\}$ es de Cauchy. Tendrá por tanto un límite único $\vec{v}$ en M (M es completo), y fácilmente se deduce que $\| \vec{y} - \vec{v} \|^2 = d$.

Por otra parte, para cualquier $\vec{z} \in M$ y para cualquier α real se tiene:

$$\begin{aligned} \| \vec{y} - \vec{v} - \alpha\vec{z} \|^2 &= \| \vec{y} - \vec{v} \|^2 + \alpha^2\| \vec{z} \|^2 - 2\alpha < \vec{y} - \vec{v}, \vec{z} > & \text{(E.10)} \\ &= d + \alpha^2\| \vec{z} \|^2 - 2\alpha < \vec{y} - \vec{v}, \vec{z} > & \text{(E.11)} \\ &\geq d. & \text{(E.12)} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \alpha^2\| \vec{z} \|^2 - 2\alpha < \vec{y} - \vec{v}, \vec{z} > &\geq 0, & \text{(E.13)} \\ \alpha^2\| \vec{z} \|^2 &\geq 2\alpha < \vec{y} - \vec{v}, \vec{z} > . & \text{(E.14)} \end{aligned}$$

Como (E.14) se ha de cumplir para cualquier posible valor de α, ha de suceder que $< \vec{y} - \vec{v}, \vec{z} >= 0$, y como $\vec{z}$ es arbitrario en M, se deduce que $(\vec{y} - \vec{v}) \perp M$. Como además hemos visto que $\vec{v} \in M$, tenemos que $\vec{v}$ es proyección de $\vec{y}$ en M (Definición 1.1). El desarrollo anterior muestra también que $\vec{v}$ es la mejor aproximación de $\vec{y}$ por un vector de M (en términos de la norma definida).

Veamos, en fin, que ningún otro vector $\vec{u} \in M$, $\vec{u} \neq \vec{v}$ puede ser proyección de $\vec{y}$ en M, ni verificar $\| \vec{y} - \vec{u} \|^2 = d$. Supongamos que hubiera un tal $\vec{u}$. Entonces, $(\vec{y} - \vec{u}) = (\vec{y} - \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u})$. Además, $(\vec{y} - \vec{v}) \perp M$, y $(\vec{v} - \vec{u}) \in M$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \| \vec{y} - \vec{u} \|^2 &= < \vec{y} - \vec{u}, \vec{y} - \vec{u} > \\ &= < (\vec{y} - \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}), (\vec{y} - \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}) > \\ &= \| \vec{y} - \vec{v} \|^2 + \| \vec{v} - \vec{u} \|^2 + 2 < \vec{y} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{u} > \\ &\geq \| \vec{y} - \vec{v} \|^2, \end{aligned}$$

ya que $2 < \vec{y} - \vec{v}, \vec{v} - \vec{u} > = 0$, $\| \vec{v} - \vec{u} \|^2 \geq 0$, y $\| \vec{v} - \vec{u} \|^2 = 0$ implicaría $\vec{u} = \vec{v}$.

Observación E.1 ¿Qué trascendencia tiene en el enunciado del Teorema E.1 que H (y, en consecuencia, su subespacio M) tengan estructura de espacio de Hilbert? Examinando la demostración del Teorema E.1, vemos que se da por supuesta la existencia en M del límite de la sucesión $\{v_n\}$ construida. Si M no fuera espacio de Hilbert, tal límite podría no existir en M.

Observación E.2 ¿Debemos preocuparnos de verificar que estamos ante un espacio de Hilbert? ¿Cómo hacerlo? Cuando los regresores generan un espacio de dimension finita, nada de ello es preciso. Cuando se hace análisis de series temporales, la mejor predicción lineal en el momento t del valor de la misma en $t+1$ (predicción una etapa hacia adelante) se hace proyectando y_{t+1} sobre el subespacio que generan $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$ (todo el "pasado" de la serie). Este "pasado", al menos en principio, puede ser infinito dimensional y aquí sí tiene objeto suponer que genera un espacio de Hilbert para garantizar la existencia de la proyección.

Nótese, incidentalmente, que en este problema emplearíamos una norma que no sería la euclídea ordinaria, sino la inducida por el producto interno $< y_t, y_s >= E[y_t y_s]$ (supuesta estacionariedad y media cero). Pueden verse más detalles en la obra ya citada Anderson (1971), Sección 7.6. Ejemplos del uso del espacio de Hilbert en series temporales pueden verse en Davis (1977), Cap. 2, o Shumway and Stoffer (2006), Apéndice B.1.

E.2. Proyección sobre subespacios $h = M \cap K(B)$.

El **Lema 4.4** decía:

> *Sea B una matriz cualquiera, y $K(B)$ el núcleo de la aplicación lineal que representa. Sea M un subespacio de H y $h = M \cap K(B)$. Entonces, $M \cap h^{\perp} = R(P_M B')$.*

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, $M \cap h^{\perp}$ puede expresarse de otro modo que hará más simple la demostración. En efecto,

$$M \cap h^{\perp} = M \cap R(B'); \tag{E.15}$$

véase el Ejercicio 4.2, pág. 58.

Probaremos ahora que ambos subespacios considerados en el enunciado son el mismo, utilizando la expresión (E.15), y mostrando la mutua inclusión.

i) $M \cap h^{\perp} \subseteq R(P_M B')$. En efecto,

$$\begin{aligned} \vec{x} \in M \cap h^{\perp} & \Longrightarrow \vec{x} \in M \cap R(B') \\ & \Longrightarrow \exists \vec{a}: \quad \vec{x} = B'\vec{a} \\ & \Longrightarrow P_M\vec{x} = P_M B'\vec{a} \\ & \Longrightarrow \vec{x} = P_M B'\vec{a} \\ & \Longrightarrow \vec{x} \in R(P_M B') \end{aligned}$$

ii) $M \cap h^{\perp} \supseteq R(P_M B')$. Es inmediato, ya que,

$$\vec{x} \in R(P_M B') \Longrightarrow \vec{x} \in R(P_M) \Longrightarrow \vec{x} \in M$$

Sea ahora $\vec{z} \in h$. Entonces, como $h = M \cap K(B)$, $\vec{z} \in M$ y $\vec{z} \in K(B)$. Por tanto:

$$< \vec{x}, \vec{z} > \; = \; \vec{x}\,'\vec{z} = \vec{a}\,'BP_M\vec{z} = \vec{a}\,'B\vec{z} = 0$$

Por tanto, $\vec{x} \in M$ y además $\vec{x} \perp h$, luego $\vec{x} \in M \cap h^{\perp}$, lo que prueba ii) y finaliza la demostración del lema.

■