Apéndice B

Algunos prerrequisitos estadísticos.

B.1. Distribuciones χ^2 y $\mathcal{F}$ descentradas

Sean $X_i \overset{\text{indep}}{\sim} N(\mu_i, \sigma^2)$, $(i = 1 \ldots, n)$. Sea $\delta^2 = (\mu_1^2 + \ldots + \mu_n^2)/\sigma^2$. Entonces, la variable aleatoria

$$Z = \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{\sigma^2} \tag{B.1}$$

se dice que sigue una distribución $\chi^2_n(\delta)$, o distribución χ^2 *descentrada* con *parámetro de no centralidad* δ y n grados de libertad. Algunos textos definen δ^2 o $\frac{1}{2}\delta^2$ como parámetro de no centralidad; la notación que empleamos es congruente con las Tablas en **??** . Claramente, si $\delta = 0$ se tiene la χ^2 habitual o *centrada*.

Si $Z \sim \chi^2_m(\delta)$ y $V \sim \chi^2_n$ son ambas independientes, la variable aleatoria

$$W = \frac{n}{m}\frac{Z}{V} \tag{B.2}$$

sigue una distribución $\mathcal{F}_{m,n}(\delta)$ o $\mathcal{F}$ de Snedecor descentrada, con parámetro de no centralidad δ. Si V siguiera una distribución $\chi^2_n(\gamma)$, tendríamos que

W sería una $\mathcal{F}$ de Snedecor doblemente descentrada, habitualmente denotada como $\mathcal{F}_{m,n}(\delta, \gamma)$. Siempre nos referiremos al primer tipo, en que solo el numerador es descentrado.

La $\mathcal{F}$ de Snedecor descentrada es una distribución definida en el semieje real positivo, cuya forma es similar a la de su homóloga centrada. Su moda está tanto mas desplazada a la derecha cuanto mayor sea el parámetro de no centralidad. El examen del estadístico de contraste Q_h introducido en la Sección 12 hace evidente que cuando la hipótesis contrastada no es cierta, la distribución de Q_h es descentrada. Ello permite, como ya se indicó, calcular con facilidad la potencia de cualquier contraste, si se dispone de tablas de la $\mathcal{F}_{m,n}(\delta)$. El apéndice A.4 proporciona tablas que permiten calcular la potencia de los contrastes en análisis de varianza directamente, prefijada una alternativa.

B.2. Estimación máximo verosímil

Se realiza maximizando la función de verosimilitud $L(\vec{\beta}, \vec{y})$ o, equivalentemente, su logaritmo, $\ell(\vec{\beta}, \vec{y})$. Sea $\hat{\beta}$ el vector que maximiza $\ell(\vec{\beta}, \vec{y})$. En condiciones muy generales, se tiene que para muestras grandes

$$\hat{\beta} \overset{asint}{\sim} N(\vec{\beta}, \Sigma_{\hat{\beta}}) \tag{B.3}$$

$$\Sigma_{\hat{\beta}} \approx \left[I(\hat{\beta})\right]^{-1} \tag{B.4}$$

En la expresión anterior, $I(\hat{\beta})$ es la llamada *matriz de información* cuyo elemento genérico de lugar ij se define así:

$$\left[I(\hat{\beta})\right]_{ij} = -\frac{\partial^2 \ell(\vec{\beta}, \vec{y})}{\partial\beta_i \partial\beta_j}. \tag{B.5}$$

Una consecuencia de (B.3)–(B.4) es que si $\Sigma_{\hat{\beta}}$ es de dimensión $p \times p$,

$$(\hat{\beta} - \vec{\beta})'(\Sigma_{\hat{\beta}})^{-1}(\hat{\beta} - \vec{\beta}) \sim (\hat{\beta} - \vec{\beta})' I(\hat{\beta})(\hat{\beta} - \vec{\beta}) \sim \chi^2_p;$$

esto permite contrastar hipótesis como $H_0 : \vec{\beta} = \vec{\beta}_0$ utilizando como estadístico

$$(\hat{\beta} - \vec{\beta}_0)' I(\vec{\beta}_0)(\hat{\beta} - \vec{\beta}_0) \tag{B.6}$$

o alternativamente

$$(\hat{\beta} - \vec{\beta}_0)' I(\hat{\beta})(\hat{\beta} - \vec{\beta}_0). \tag{B.7}$$

Asintóticamente ambos contrastes son equivalentes, y ambos se conocen como *contrastes de Wald*; pueden consultarse más detalles en Lehmann (1983), Cap. 6 o Garthwaite et al. (1995), Cap. 3 y 4.

B.3. Contraste razón generalizada de verosimilitudes

Supongamos una hipótesis nula H_0 que prescribe para el vector de parámetros un subespacio h. Supongamos h es un subespacio de M, y $\dim(h) = q < p = \dim(H)$. Supongamos, finalmente, que $L(\vec{\beta}, \vec{Y})$ es la función de verosimilitud y

$$\hat{\beta}_h = \arg\max_{\vec{\beta} \in h} L(\vec{\beta}, \vec{Y}) \tag{B.8}$$

$$\hat{\beta}_M = \arg\max_{\vec{\beta} \in M} L(\vec{\beta}, \vec{Y}). \tag{B.9}$$

Entonces, en condiciones muy generales, que no requieren que $\vec{Y}$ siga una distribución particular, se verifica que bajo H_0,

$$-2 \log_e \left(\frac{L(\hat{\beta}_h, \vec{Y})}{L(\hat{\beta}_M, \vec{Y})} \right) \sim \chi^2_{(p-q)}. \tag{B.10}$$

Por lo tanto, un contraste de la hipótesis H_0 puede obtenerse comparando el estadístico en el lado izquierdo de (B.10) con el cuantil $\chi^2_{(p-q);\alpha}$; valores del estadístico mayores que dicho cualtil conducirán al rechazo de la hipótesis nula.