Apéndice A

Algunos resultados en Algebra Lineal.

A.1. Resultados varios sobre Algebra Matricial.

Teorema A.1 *El rango y la traza de una matriz idempotente coinciden.*

Definición A.1 *En un espacio vectorial V llamamos* producto interno *a una aplicación de $H \times H \longrightarrow R$ (si es real-valorado) o en C (si es completo valorado), tal que a cada par de vectores $\vec{u}\,, \vec{v}$ corresponde $< \vec{u}\,, \vec{v}\, >$ verificando:*

$$< \vec{u}\,, \vec{v}\, >= \overline{< \vec{v}\,, \vec{u}\, >} \tag{A.1}$$

$$< \vec{u}\,, \vec{u}\, >\geq 0 \qquad \forall \vec{u}\, \in H \tag{A.2}$$

$$< \vec{u}\,, \vec{u}\, >= 0 \Longrightarrow \vec{u}\, = 0 \tag{A.3}$$

$$< \vec{u}\,, \alpha\vec{v}\, + \beta\vec{w}\, >= \alpha < \vec{u}\,, \vec{v}\, > +\beta < \vec{u}\,, \vec{w}\, > \tag{A.4}$$

Definición A.2 *Llamamos producto interno euclídeo de dos n-eplas $\vec{u}\,, \vec{v}$ en R^n al definido así: $< \vec{u}\,, \vec{v}\, >= \vec{u}\,'\vec{v}$. Es fácil comprobar que verifica las condiciones de la Definición A.1. La* norma euclídea *$||\vec{u}\,||$ del vector $\vec{u}$ se define como $||\vec{u}\,|| = +\sqrt{< \vec{u}\,, \vec{u}\, >} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$*

Definición A.3 *Dados dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ en un espacio vectorial, definimos el coseno del ángulo que forman como*

$$\cos(\alpha) = \frac{< \vec{u}\,, \vec{v} >}{||\vec{u}\,||||\vec{v}\,||}. \tag{A.5}$$

Teorema A.2 (Sherman-Morrison-Woodbury) *Sea D una matriz simétrica $p \times p$ y $\vec{a}\,,\vec{c}$ vectores $p \times 1$. Entonces,*

$$(D + \vec{a}\,\vec{c}\,')^{-1} = D^{-1} - D^{-1}\vec{a}\,(1 + \vec{c}\,'D^{-1}\vec{a}\,)^{-1}\vec{c}\,'D^{-1} \tag{A.6}$$

Demostración:

Multiplicando ambos lados de (A.6) por $(D + \vec{a}\,\vec{c}\,')$ se llega a la igualdad $I = I$. En particular, si $\vec{a} = \vec{c} = \vec{z}$, la relación anterior produce:

$$(D + \vec{z}\vec{z}\,')^{-1} = D^{-1} - D^{-1}\vec{z}(1 + \vec{z}\,'D^{-1}\vec{z})^{-1}\vec{z}\,'D^{-1} \tag{A.7}$$

Teorema A.3 *Si A y D son simétricas y todas las inversas existen:*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + FE^{-1}F' & -FE^{-1} \\ E^{-1}F' & E^{-1} \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

siendo

$$\begin{aligned} E &= D - B'A^{-1}B & \text{(A.9)} \\ F &= A^{-1}B & \text{(A.10)} \end{aligned}$$

Demostración:

Basta efectuar la multiplicación matricial correspondiente.

Un caso particular de interés se presenta cuando la matriz particionada cuya inversa deseamos es del tipo:

$$\begin{pmatrix} (X\,'X) & X\,'Z \\ Z\,'X & Z\,'Z \end{pmatrix}$$

La aplicación de (A.8) proporciona entonces para el bloque superior izquierdo:

$$\begin{aligned} A^{-1} + FE^{-1}F\,' &= (X\,'X)^{-1} + \\ &+ (X\,'X)^{-1}X\,'Z[Z\,'Z - Z\,'X(X\,'X)^{-1}X\,'Z]^{-1}Z\,'X(X\,'X)^{-1} \end{aligned} \tag{A.11}$$

y similarmente para los demás bloques. Véase Seber (1977), pág. 390 y Myers (1990), pág. 459.

A.2. Cálculo diferencial con notación matricial

Hay aquí sólo una breve recopilación de resultados útiles. Más detalles y demostraciones en Abadir and Magnus (2005), Searle (1982) y Magnus and Neudecker (1988).
Haremos uso de las siguientes definiciones y notación.

Definición A.4 *Sea $\vec{x}$ un vector $m \times 1$ e y una función escalar de $\vec{x}$: $y = f(x_1, \ldots, x_m) = f(\vec{x})$. Entonces:*

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Si $y = \vec{x}\,'A\vec{x}$ siendo A una matriz cuadrada cualquiera, es inmediato comprobar que:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \vec{x}}\right) = (A + A')\vec{x}\,.$$

En el caso, frecuente, de que A sea simétrica, tenemos que:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \vec{x}}\right) = 2A'\vec{x} \tag{A.12}$$

Definición A.5 *Sea $\vec{y}$ una función vectorial $(n \times 1)$–valorada de $\vec{x}$, vector $m \times 1$. Entonces:*

$$\left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_m} & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Hay algunos casos particulares de interés. Si $y = \vec{a}\,'\vec{x} = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$, siendo $\vec{a}$ un vector de constantes,

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \vec{a}\,;$$

si $\vec{y} = A\vec{x}$, siendo A una matriz $(n \times m)$ de constantes,

$$\left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right) = A'.$$

Se reproducen a continuación algunos otros resultados útiles:

$$\frac{\partial \log_e |A|}{\partial A} = [A']^{-1} \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial \mathrm{tr}(BA^{-1}C)}{\partial A} = -(A^{-1}CBA^{-1}) \tag{A.14}$$