Hoja III.10

SOLUCIÓN DE ALGUNOS APARTADOS DEL EJERCICIO 3

3a ¿ $A \cup B \in \Sigma_0 \wedge A \cup \overline{B} \in \Sigma_0 \Rightarrow A \in \Sigma_0$ **?**

Aplicamos a los conjuntos $(A \cup B)$ y $(A \cup \overline{B})$ la operación intersección y las propiedades conocidas:

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \emptyset = A$

$(A \cup B)$ y $(A \cup \overline{B})$ son decidibles, por lo que su intersección también.

Como la intersección es el conjunto A tenemos que es decidible.

3c ¿ $A \cup B \in \Sigma_0 \wedge B$ finito $\Rightarrow A \in \Sigma_0$?

El conjunto A puede obtenerse como intersección de los juntos $(A \cup B)$ y $(\overline{B - A})$ como puede verse a continuación:

$$(A \cup B) - (B - A) = (A \cup B) \cap \overline{(B - A)} =$$
$$= (A \cup B) \cap \overline{(B \cap \overline{A})} = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A$$

Por hipótesis B es un conjunto finito, por lo que (B - A) también lo será al ser un subconjunto suyo. Como todo conjunto finito es decidible (B - A) es decidible. Los complementarios de conjuntos decidibles también son decidibles, por lo que $\overline{B - A}$ pertenece a la clase Σ_0.

Al ser $(A \cup B)$ y $(\overline{B - A})$ decidibles, su intersección también, por tanto A es decidible.

Hoja III.10

SOLUCIÓN DE ALGUNOS APARTADOS DEL EJERCICIO 4

4a ¿ $A \notin \Sigma_0 \wedge B \notin \Sigma_0 \Rightarrow A \cup B \notin \Sigma_0$ **?**

FALSO.

Contraejemplo: K es un conjunto no decidible, $\overline{K}$, tampoco es decidible, pero su unión sí es decidible, $K \cup \overline{K} = \Sigma^* \in \Sigma_0$.

4d ¿ $A \notin \Sigma_0 \wedge A \cap B \notin \Sigma_0 \Rightarrow B \notin \Sigma_0$ **?**

FALSO.

Contraejemplo: K es un conjunto no decidible, y $K \cap \Sigma^*$ tampoco lo es, pues $K \cap \Sigma^* = K$. Pero Σ^* es el conjunto total, y $\Sigma^* \in \Sigma_0$.

Hoja III.10

SOLUCIÓN DE ALGUNOS APARTADOS DEL EJERCICIO 5

5a ¿ $A \notin \Sigma_1 \wedge B \notin \Sigma_1 \Rightarrow A \cup B \notin \Sigma_1$ **?**

FALSO.

Contraejemplo: TOT y $\overline{\text{TOT}}$ son conjuntos no semidecidible, y $\text{TOT} \cup \overline{\text{TOT}} = \Sigma^*$. Pero Σ^* es un conjunto decidible, y por tanto $\Sigma^* \in \Sigma_1$.

5f ¿ $A \notin \Sigma_1 \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \notin \Sigma_1$ **?**

FALSO.

Contraejemplo: TOT es un conjunto no semidecidible, y $\varnothing \subseteq$ TOT. Pero $\varnothing$ es un conjunto decidible, y por tanto $\varnothing \in \Sigma_1$.

Hoja III.10

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 6

a) $A = \{ \mathbf{x}: \ \mathbf{x} \in R_{\mathbf{x}} \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

b) $B = \{ \mathbf{x}: \ \mathbf{x} \notin R_{\mathbf{x}} \} \notin \Sigma_1$

c) $C = \{ \mathbf{x}: \ \mathbf{x} \notin W_{\mathbf{x}} \} \notin \Sigma_1$

d) $D = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}): \ \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{z} \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

e) $E = \{ \mathbf{x}: \ 2*\mathbf{x} \in R_{\mathbf{x}} \cap W_{\mathbf{x}} \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

f) $F = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}): \ \neg\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) > 31 \} \notin \Sigma_1$

g) $G = \{ \mathbf{x}: \exists y \exists z(\varphi_{\mathbf{x}}(y) \neq \varphi_{\mathbf{x}}(z)) \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

h) $H = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}): \exists z \ (\mathbf{x} \in W_{\mathbf{z}} \wedge z \in W_{\mathbf{y}}) \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

i) $I = \{ \mathbf{x} : \exists y \ (\varphi_{\mathbf{x}}(y) > y^2) \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

j) $J = \{ \mathbf{x}: \forall y \forall z \ \neg(\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \neq \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) \} \notin \Sigma_1$

k) $K = \{ \mathbf{x}: \ | \ W_{\mathbf{x}} \ | > 6 \} \in \Sigma_1 - \Sigma_0$

l) $L = \{ \mathbf{x}: \ | \ \overline{W_x} \ | = 6 \} \notin \Sigma_1$