# Ejercicios

## III.10. CONJUNTOS DECIDIBLES Y SEMIDECIDIBLES

PRERREQUISITOS:

- Entender la diferencia entre conjuntos decidibles y semidecidibles
- Conocer las propiedades de los conjuntos decidibles y semidecidibles
- Dominar las técnicas de intercalado y diagonalización

PROBLEMAS:

### A. PARA APLICAR LA TÉCNICA DE INTERCALADO EN DEMOSTRACIONES DE SEMIDECIDIBILIDAD

1. Demuestra que los siguientes conjuntos son semidecidibles:

   a) $A = \{ x: n \in W_x \}$ donde $n \in \Sigma^*$ es una constante cualquiera

   b) $B = \{ x: n \in R_x \}$ donde $n \in \Sigma^*$ es una constante cualquiera

   c) $C = \{ x: \exists y \geq 2*x \ ( \varphi_x(y) \geq x^2 ) \}$

   d) $D = \{ x: \exists z \ \varphi_x(2*z) = z \}$

   e) $E = \{ x: \varphi_x$ no es inyectiva $\}$

### B. PARA PROFUNDIZAR EN LAS PROPIEDADES GENÉRICAS DE LOS CONJUNTOS DECIDIBLES Y SEMIDECIDIBLES

2. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Hay conjuntos no decidibles cuyo complementario es semidecidible.

   b) Un conjunto es decidible si y solo si su complementario es semidecidible.

3. Dados $A, B \in \Sigma^*$, demuestra las siguientes propiedades relativas a decidibilidad y semidecidibilidad:

   a) Si $A \cup B \in \Sigma_0$ y $A \cup \overline{B} \in \Sigma_0$, entonces $A \in \Sigma_0$.

   b) Si $A \cup B \in \Sigma_1$ y $A \cup \overline{B} \in \Sigma_1$, entonces $A \in \Sigma_1$.

   c) Si B es finito y $A \cup B \in \Sigma_0$, entonces $A \in \Sigma_0$.

   d) Si B es finito y $A \cup B \in \Sigma_1$, entonces $A \in \Sigma_1$.

4. Demuestra que las siguientes propiedades no son ciertas encontrando contraejemplos:

   a) Si $A \notin \Sigma_0$ y $B \notin \Sigma_0$, entonces $A \cup B \notin \Sigma_0$.
   b) Si $A \notin \Sigma_0$ y $B \notin \Sigma_0$, entonces $A \cap B \notin \Sigma_0$.
   c) Si $A \notin \Sigma_0$ y $A \cup B \notin \Sigma_0$, entonces $B \notin \Sigma_0$.
   d) Si $A \notin \Sigma_0$ y $A \cap B \notin \Sigma_0$, entonces $B \notin \Sigma_0$.
   e) Si $A \notin \Sigma_0$ y $A \subseteq B$, entonces $B \notin \Sigma_0$.
   f) Si $A \notin \Sigma_0$ y $B \subseteq A$, entonces $B \notin \Sigma_0$.

5. Demuestra que las siguientes propiedades no son ciertas encontrando contraejemplos:

   a) Si $A \notin \Sigma_1$ y $B \notin \Sigma_1$, entonces $A \cup B \notin \Sigma_1$.
   b) Si $A \notin \Sigma_1$ y $B \notin \Sigma_1$, entonces $A \cap B \notin \Sigma_1$.
   c) Si $A \notin \Sigma_1$ y $A \cup B \notin \Sigma_1$, entonces $B \notin \Sigma_1$.
   d) Si $A \notin \Sigma_1$ y $A \cap B \notin \Sigma_1$, entonces $B \notin \Sigma_1$.
   e) Si $A \notin \Sigma_1$ y $A \subseteq B$, entonces $B \notin \Sigma_1$.
   f) Si $A \notin \Sigma_1$ y $B \subseteq A$, entonces $B \notin \Sigma_1$.

## C. PARA ACOSTUMBRARSE A CLASIFICAR INTUITIVAMENTE LOS CONJUNTOS ENTRE DECIDIBLES, SEMIDECIDIBLES PERO NO DECIDIBLES, Y NO SEMIDECIDIBLES.

6. De los siguientes conjuntos trata de descubrir cuáles son decidibles y cuáles semidecidibles (sin ser decidibles). Puede ser que algún conjunto no sea ninguna de las dos cosas. No es preciso que hagas ninguna demostración formal (se trata de trabajar la intuición).

   a) $A = \{ x: \ x \in R_x \}$
   b) $B = \{ x: \ x \notin R_x \}$
   c) $C = \{ x: \ x \notin W_x \}$
   d) $D = \{ (x, y, z): \ \varphi_x(y) = z \}$
   e) $E = \{ x: \ 2*x \in R_x \cap W_x \}$
   f) $F = \{ (x, y): \ \neg\varphi_x(y) > 31 \}$
   g) $G = \{ x: \exists y \exists z (\varphi_x(y) \neq \varphi_x(z)) \}$
   h) $H = \{ (x, y): \exists z \ (x \in W_z \wedge z \in W_y) \}$
   i) $I = \{ x : \exists y \ ( \varphi_x(y) > y^2 ) \}$
   j) $J = \{ x: \forall y \forall z \ \neg(\varphi_x(y) \neq \varphi_x(z)) \}$
   k) $K = \{ x: \ | W_x | > 6 \}$
   l) $L = \{ x: \ |\overline{W_x}| = 6 \}$