Ejercicios

II.9. DIAGONALIZACION

OBJETIVOS:

I. Utilizar la técnica de diagonalización para demostrar la incomputabilidad de algunas funciones y la indecidibilidad de algunos predicados

PROBLEMAS:

1. Enuncia el problema de parada para funciones de cualquier número de argumentos (no necesariamente unarias).

2. La siguiente función no es computable y ya dispones de una demostración[1].

$$\psi(x) = \begin{cases} x+1 & \varphi_x(x)+1>3 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Realiza de nuevo la demostración utilizando funciones diagonales δ diferentes que cumplan

a) δ es una función no total

b) δ es una función con rango de cardinal superior a 3

3. Demuestra la incomputabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x(y)=\varepsilon \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1 & \varphi_x(x)>x \\ 2 & \text{c.c.} \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x(10*x)\neq 31 \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

4. Demuestra la incomputabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x+99 & \varphi_x(x)>100 \\ x+101 & \varphi_x(x)\le 100 \\ 98 & \text{c.c.} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1 & x\in K \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & x\in K \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

d) $p(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & x\in K \\ x \bmod 3 & \text{c.c.} \end{cases}$

[1] Algunas demostraciones de incomputabilidad usando la técnica de diagonalización. J. Ibáñez, A. Irastorza, A. Sánchez. UPV/EHU/LSI/TR 08-2000

e) $q(x) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x(2*x+3)\downarrow \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$ f) $r(x) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x(x/2)\downarrow \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

g) $s(x) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x(2*x)\downarrow \vee \varphi_x(2*x+1)\downarrow \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

h) $t(x) = \begin{cases} \text{true} & x \in R_x \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

5. El conjunto $\{x: \forall y\ \varphi_x(y)\downarrow \wedge R_x \neq \Sigma^*\}$ no es decidible y ya dispones de una demostración[1]. Realiza de nuevo la demostración utilizando una función diagonal diferente.

6. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \text{true} & \mathbf{x} \in \text{TOT} \wedge R_x \subseteq P \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$$

donde P es el conjunto $\{$ y: y mod 2 = 0 $\}$ de los números pares. Esta función <u>no es computable</u>. Si quisiéramos demostrarlo por diagonalización, deberíamos construir (con ayuda de una tabla-ejemplo) una función diagonal. Cinco alumnos/as se han puesto manos a la obra, y cada uno ha propuesto una función diagonal diferente para este problema. Sin embargo, <u>todos menos una han metido la gamba</u> porque sus funciones no sirven por diferentes razones. Para cada una de ellas razona por qué es correcta o incorrecta para aplicar diagonalización en este caso.

$$d_1(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+20 & f(x) \\ x & \neg f(x) \end{cases}$$

$$\delta_2(x) \cong \begin{cases} \perp & f(x) \\ 2*x & \neg f(x) \end{cases}$$

$$d_3(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+2 & f(x) \\ 2 & \neg f(x) \end{cases}$$

$$d_4(x) = \begin{cases} 10 & f(x) \\ \varphi_x(x)+2 & \neg f(x) \end{cases}$$

$$d_5(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+4 & f(x) \vee \varphi_x(x) \bmod 2 = 0 \\ 10 & \text{c.c.} \end{cases}$$

7. Demuestra la incomputabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x(y) = \varphi_x(z) \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$ b) $g(x, y, z) = \begin{cases} x + y + z & \varphi_x(y) > z \\ 17 & \text{c.c.} \end{cases}$

8. Demuestra que las siguientes funciones no son computables:

a) $f(x) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x \text{ es la función característica de un predicado} \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \text{true} & \varphi_x \text{ es función total no acotada} \\ \text{false} & \text{c.c.} \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 10^x & \forall z\ \varphi_x(z) > 40 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

9. Demuestra que los siguientes conjuntos no son decidibles:

a) $A = \{ x : \forall y \geq x \ \ \varphi_x(y)\downarrow \}$ b) $B = \{ x : \forall y\ (\varphi_x(y)\downarrow \wedge \exists n\ \varphi_x(y)=10^n) \}$

c) $D = \{ x : \forall y \geq x \ \ \varphi_x(y) \geq y^2 \}$ d) $A = \{(x,y,z) : \varphi_x(y) = y^z\}$