Ejercicios

I.1.PRELIMINARES

PRERREQUISITOS:

- ❑ Entender la diferencia entre función (definición clásica) y función parcial, y conocer la notación asociada (convergencia, indefinido, igualdad parcial, etc.)
- ❑ Entender las pequeños cambios que las propiedades de las funciones sufren cuando se definen para funciones parciales (dominio, inyectividad, etc.)

PROBLEMAS:

A. PARA HABITUARSE A TRABAJAR CON FUNCIONES PARCIALES E IDENTIFICAR FUNCIONES MAL DEFINIDAS

1. Escribir todas las funciones parciales posibles entre A = {**a**,**b**,**c**} y B={**0**,**1**}

2* ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son funciones $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y cuáles no, es decir son funciones mal definidas?

a) $\{ (\mathbf{n}, \mathbf{n}^2 - 6*\mathbf{n} + 9) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

b) $\{ (2*\mathbf{n}, \mathbf{n}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

c) $\{ (\mathbf{n}, \mathbf{n}^3) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

d) $\{ (\mathbf{n}^3, \mathbf{n}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

e) $\{ (\mathbf{n}, \mathbf{n}+4) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

f) $\{ (\mathbf{n}+4, \mathbf{n}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

g) $\{ (\mathbf{n}, 2^{\mathbf{n}}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

h) $\{ (\mathbf{n}^2 - 6*\mathbf{n} + 9, \mathbf{n}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \}$

i) $\{ (\mathbf{n}, \mathbf{m}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \wedge \exists \mathbf{a} \in \mathbb{N}\ (\mathbf{m} = \mathbf{a}^{\mathbf{n}}) \}$

j) $\{ (\mathbf{n}, \mathbf{m}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N} \wedge \mathbf{m} \in \mathbb{N} \wedge \exists \mathbf{a} \in \mathbb{N}\ (\mathbf{m}*\mathbf{n} = \mathbf{a}^2) \}$

3. Sea A un conjunto no vacío y $\wp$(A) el conjunto de subconjuntos de A. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de A $\times$ $\wp$(A) son funciones A $\longrightarrow$ $\wp$(A)?. Justifica tus respuestas.

a) $\{ (\mathbf{a}, B) : \mathbf{a} \in B \}$

b) $\{ (\mathbf{a}, B) : B = \{\mathbf{a}\} \}$

c) $\{ (\mathbf{a}, B) : B \neq \emptyset \}$

d) $\{ (\mathbf{a}, B) : B \cup \{\mathbf{a}\} = A \}$

4. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\Sigma^* \times \Sigma^*$ son funciones $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$?

a) $\{ (\mathbf{u}, \mathbf{u}^R) : \mathbf{u} \in \Sigma^* \}$

b) $\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \Sigma^* \wedge \exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}\ (\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathbf{n}}) \}$}

c) $\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \in \Sigma^* \wedge \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u}^3 \}$

d) $\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \Sigma^* \wedge \exists \mathbf{z} \in \Sigma^*\ (\mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{z} \bullet \mathbf{u}) \}$}

5. Razona por qué cada una de las siguientes definiciones no corresponden a funciones $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$:

a) $\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{y} & |\mathbf{x}| \bmod 2 = 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$

b) $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{y} & \mathbf{x} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \exists \mathbf{u}\ (\mathbf{x} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{z}) \end{cases}$

c) $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u} & \exists \mathbf{z}\ (\mathbf{x} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{a} \bullet \mathbf{z}) \\ \mathbf{v} & \exists \mathbf{v}\ (\mathbf{x} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{a} \bullet \mathbf{z}) \\ \varepsilon & \text{c.c.} \end{cases}$

d) $\chi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cong \begin{cases} \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{y}| \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{b} \bullet \mathbf{y} & |\mathbf{x}| \bmod 2 \neq 0 \end{cases}$

B. PARA DOMINAR LOS CONCEPTOS DE DOMINIO Y RANGO Y DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES TOTALES Y NO TOTALES.

6* Dada una función $\psi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, ¿alguna de las siguientes definiciones corresponde al rango de la función ψ?

a) $\{ \mathbf{x} \in \Sigma^*: \exists \mathbf{y}\ (\psi(\mathbf{x}) \cong \mathbf{y}) \}$

b) $\{ \mathbf{x} \in \Sigma^*: \exists \mathbf{y}\ (\psi(\mathbf{y}) \cong \mathbf{y}) \}$

c) $\{ \mathbf{x} \in \Sigma^*: \forall \mathbf{y}\ (\psi(\mathbf{x}) \cong \mathbf{y}) \}$

d) $\{ \mathbf{x} \in \Sigma^*: \forall \mathbf{y}\ (\psi(\mathbf{y}) \cong \mathbf{x}) \}$

e) $\{ \mathbf{x} \in \Sigma^*: \exists \mathbf{y}\ (\psi(\mathbf{y}) \not\cong \mathbf{x}) \}$

7* Para los ejemplos del ejercicio 2 que hayan resultado ser funciones, calcula su dominio y su rango

8. Determina el rango y el dominio de cada una de las siguientes funciones $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2+2$

b) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}+2)^2$

c) $\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} 2 * \mathbf{x} + 1 & \mathbf{x} \bmod 2 = 0 \\ 2 * \mathbf{x} + 1 & \mathbf{x} \bmod 3 = 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$

d) $\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} (\mathbf{x} + 27) / \mathbf{x}^2 & (\mathbf{x} + 27) \bmod \mathbf{x}^2 = 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$

9* Dada una función $\psi: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ no total, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) $\forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})\uparrow$

b) $\exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})\uparrow$

c) $\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{z}\ (\psi(\mathbf{x}) \not\cong \mathbf{z})$

d) $\exists \mathbf{z}\ \forall \mathbf{x}\ (\psi(\mathbf{x}) \not\cong \mathbf{z})$

e) $\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{z}\ (\psi(\mathbf{x}) \not\cong \mathbf{z})$

f) $\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{z}\ (\psi(\mathbf{x}) \not\cong \mathbf{z})$

C. PARA ENTENDER LA DIFERENCIA ENTRE IGUALDAD PARCIAL E IGUALDAD ESTRICTA.

10* Considera las siguientes funciones $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, y utiliza los símbolos =, <, ≤, ≅ o sus negaciones para comparar las dos expresiones que aparecen en cada uno de los apartados:

$$\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} 2 * \mathbf{x} & \mathbf{x} \bmod 2 \neq 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} 3 * \mathbf{x} + 1 & \mathbf{x} \bmod 5 \neq 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) $\psi(5)$ y $\chi(10)$

b) $\psi(5)$ y $\chi(3)$

c) $\psi(12)$ y $\chi(5)$

d) $\psi(22)$ y $\chi(9)$

11. Considera las siguientes funciones $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, y utiliza los símbolos =, ≅ o sus negaciones para comparar las dos expresiones que aparecen en cada uno de los apartados

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{x}| \bmod 2 = 0 \ \wedge \ \mathbf{x} \neq \varepsilon \\ \mathbf{b} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{x}| \bmod 2 \neq 0 \\ \varepsilon & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{x}| \bmod 2 \neq 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) $\psi(\mathbf{aab})$ y $f(\mathbf{aab})$

b) $\psi(f(\mathbf{bb}))$ y $f(\psi(\mathbf{bb}))$

c) $f(\varepsilon)$ y $\psi(\varepsilon)$

d) $f(\varepsilon)$ y $\psi(f(\varepsilon))$

e) $f(\mathbf{bbab})$ y $\psi(\mathbf{bab})$

f) $f(\psi(\mathbf{bab}))$ y $\psi(f(\mathbf{abb}))$

g) $\psi(f(\mathbf{bb}))$ y $f(f(\mathbf{ab})^R)^R$

h) $f(\psi(\mathbf{aba}))$ y $\psi(f(\mathbf{aab})^R)^R$

D. PARA ENTENDER LOS CONCEPTOS DE INYECTIVIDAD, SOBREYECTIVIDAD Y BIYECTIVIDAD CUANDO SE APLICAN A FUNCIONES PARCIALES.

12* Para cada apartado busca dos ejemplos de función inyectiva: uno que cumpla la propiedad indicada y otro que no la cumpla.

a) finita

b) sobreyectiva

c) biyectiva

d) total

e) acotada

f) creciente

13. Dadas las siguientes funciones $\Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, con $\Sigma = \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, determina si son o no finitas, totales, inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

a) $\chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{x}| \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{a} & \text{c.c.} \end{cases}$

b) $\psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cong \begin{cases} \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{y}| \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{y} \bullet \mathbf{x} & |\mathbf{y}| \bmod 2 \neq 0 \end{cases}$

c) $\phi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x}^R & |\mathbf{x}| \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{x} & \text{c.c.} \end{cases}$

d) $\theta(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} & |\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| \leq 4 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$

14. La función vacía es

a) biyectiva

b) sobreyectiva

c) inyectiva

d) una función mal definida

e) acotada

f) finita

E. ENTENDER LA OPERACIÓN DE COMPOSICIÓN LOCAL DE FUNCIONES PARCIALES

15. Para cada una de las funciones definidas en 1 determina si son o no finitas, totales, inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

16. Sean las siguientes funciones $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cong (\mathbf{x} + 2*\mathbf{y}) \,/\, \mathbf{z}$$

$$\chi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cong \begin{cases} \mathbf{v}+1 & \mathbf{u} \bmod 2 = 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determina las cinco funciones que se pueden definir por composición local entre ψ y χ.

F. ENTENDER LA OPERACIÓN DE INVERSIÓN DE FUNCIONES PARCIALES

17. Toma las funciones del ejercicio **13**, y en los casos en que sea posible calcula la función inversa.

G. COMBINACIÓN Y REFUERZO DE LOS OBJETIVOS B, D, E Y F

18. Sean las siguientes funciones $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x}+1 & \mathbf{x} \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{x}-1 & \mathbf{x} \bmod 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\theta(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{x} \bmod 10 \neq 1 \\ 9+2*\mathbf{x} & \text{c.c} \end{cases}$$

$$\phi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} 2*\mathbf{x} & \mathbf{x} < 10 \\ \mathbf{x}/2 & \mathbf{x} \geq 10 \wedge \mathbf{x} \bmod 2 = 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x}/3 & \mathbf{x} \bmod 3 \neq 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) Determina, defíniéndolos lo más formalmente posible, sus respectivos dominios y rangos.

b) Decide si son totales, inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

c) Describe las funciones inversas de todas aquellas que hayan resultado inyectivas.

d) Describe las funciones $\psi \circ \chi$, $\chi \circ \theta$, $\psi \circ \psi$ y $\phi \circ \phi$