CLASE Σ_0 Y CLASE Σ_1

- Conjunto DECIDIBLE (o recursivo):

P es decidible ($P \in \Sigma_0$) si su función característica C_P es computable

$$C_P(\overline{x}) = \begin{cases} \text{true} & \overline{x} \in P \\ \text{false} & \overline{x} \notin P \end{cases}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \bmod 2 = 0 \wedge \text{primo}(x-y)\}$$

$$B = L(a^*b^*a^*) \times \{ab \bullet x \bullet x^R \bullet ab : x \in \Sigma^*\}$$

$$\varnothing, \Sigma^*, A, B \in \Sigma_0 \qquad\qquad K, TOT \notin \Sigma_0$$

- Conjunto o predicado SEMIDECIDIBLE (o recursivamente enumerable):

P es semidecidible ($P \in \Sigma_1$) si su función semicaracterística χ_P es computable

$$\chi_P(\overline{x}) = \begin{cases} \text{true} & \overline{x} \in P \\ \perp & \overline{x} \notin P \end{cases}$$

$$\varnothing, \Sigma^*, K, \overline{\mathbf{VAC}} \in \Sigma_1 \qquad\qquad \overline{\mathbf{K}}, TOT \notin \Sigma_1$$

PROPIEDADES DE LAS CLASES Σ_0 Y Σ_1

- Todo conjunto finito es decidible, y su complementario también

$$A \text{ es finito} \quad \Rightarrow \quad A,\ \overline{A} \in \Sigma_0$$

- Todo conjunto decidible es semidecidible

$$\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$$

- La unión o intersección de conjuntos (semi)decidibles es (semi)decidible

$$A,\ B \in \Sigma_0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B,\ A \cup B \in \Sigma_0$$

$$A,\ B \in \Sigma_1 \quad \Rightarrow \quad A \cap B,\ A \cup B \in \Sigma_1$$

- El complementario preserva la decidibilidad, pero no necesariamente la semidecidibilidad

$$A \in \Sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \Sigma_0$$

$$K \in \Sigma_1 \quad \text{pero} \quad \overline{K} \notin \Sigma_1$$

- Un conjunto es decididible si y sólo si, él y su complementario son semidecidibles

$$A \in \Sigma_0 \quad \Leftrightarrow \quad A,\ \overline{A} \in \Sigma_1$$

CARACTERIZACIONES DE LOS CONJUNTOS SEMIDECIDIBLES

- Todo conjunto $A \in \Sigma_1$

  - Se puede expresar como la cuantificación existencial de un predicado decidible (binario)

$$A = \{ \overline{x} : \exists y\ P(\overline{x}, y) \wedge P \text{ decidible} \}$$

  - Se puede expresar como el dominio de una función computable

$$\exists e\ (A = W_e)$$

  - Se puede expresar como el rango de una función computable (si A es unidimensional)

$$\exists e\ (A = R_e)$$

  - Si no es el conjunto vacío, incluso se puede expresar como el rango de una función computable y <u>total</u> (si A es unidimensional)

$$A = \varnothing \quad \vee \quad \exists\ e \in TOT\ (A = R_e)$$

- Además, todo conjunto que cumpla una de las cuatro anteriores condiciones es semidecidible