CONJUNTOS

- Noción habitual de conjunto

- Operaciones clásicas

- Conjuntos más habituales:

  * Booleanos

$$B = \{\mathbf{true},\mathbf{false}\}$$

  * Naturales

$$N = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$$

  * Palabras sobre un alfabeto finito

$$\Sigma^* = \{\varepsilon,a,b,aa,ab,ba,bb,\ldots\}$$

  * Subconjuntos y productos cartesianos de los anteriores

$$N \times \Sigma^*$$

$$\Sigma^{*3}$$

$$\{x \in N : \exists z \in \wedge\ 3 * z = x\}$$

FUNCIÓN PARCIAL (I)

- Conjunto de *datos* **A** y conjunto de *resultados* **B**

- FUNCIÓN (PARCIAL) de **A** a **B**

$$[\psi\text{: } \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}]$$

* $\psi \subset A \times B$
* $\forall x \in A \ |\{y \in B\text{: } (x,y) \in \psi\}| \leq 1$
* Notación $\psi(x) \cong y$ en lugar de $(x,y) \in \psi$
* Nombres típicos de funciones: ψ, ϕ, θ, χ, ξ, ...
* Ejemplos:

$$\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x}^4 + \mathbf{7} & \mathbf{x} \leq \mathbf{100} \\ \mathbf{2} * \mathbf{x} + \mathbf{1} & \mathbf{x} \geq \mathbf{800} \end{cases}$$

$$\chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{5} & \mathbf{x} \leq \mathbf{10} \\ \mathbf{3} * \mathbf{x} / (\mathbf{x} - \mathbf{11}) & \mathbf{x} \geq \mathbf{11} \end{cases}$$

FUNCIÓN PARCIAL (II)

```
import java.io.*, java.Natural;
public class PSI extends Object
{
    if (X <= 10 && X >= 5)
        Y = X – 5;
    else if (X > 11)
        Y = (3 * X) / (X –11);
    else
        while (true) X ++;
    return Y;
}
```

FUNCIÓN PARCIAL (III)

- Una correspondencia $\psi \subset A \times B$ *no puede ser función* si existen **x**$\in$**A**, **y**,**z**$\in$B de forma que tanto (**x**,**y**) como (**x**,**z**) están en ψ, siendo **y≠z**

  - Contraejemplos:

$$\xi(x) \cong \begin{cases} x+1 & x \leq 100 \\ 3 * x & x \geq 88 \end{cases}$$

$$\theta(x) \cong \begin{cases} y & (3-y)^2 = x \\ \perp & \neg\exists z\ (3-z)^2 = x \end{cases}$$

- ψ**:** $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ con $\mathbf{A}=\mathbf{A_1}\times\mathbf{A_2}\times\ldots\times\mathbf{A_n}$ se dice que tiene *n* ARGUMENTOS.

$$\psi: \Sigma^{*2}\times \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{B}$$

$$\psi(x,y,n)=true \Leftrightarrow |x|-|y|=n$$

(tiene 3 argumentos, dos palabras y un natural)

CONVERGENCIA

- Sean ψ: A $\longrightarrow$ B y x$\in$A

  - ψ**(x)** CONVERGE o ψ *está definida sobre **x*** si $\exists$**y**$\in$**B** ψ**(x)**$\cong$**y**

$$[\psi(\mathbf{x})\downarrow]$$

  - ψ**(x)** DIVERGE o ψ *no está definida sobre **x*** si $\forall$**y**$\in$**B** ψ**(x)**$\ncong$**y**

$$[\psi(\mathbf{x})\uparrow]$$

- Representamos el "VALOR INDEFINIDO" por comodidad

$$[\perp]$$

  - expresión contradictoria: resultado "producido" cuando no hay resultado

  - Ejemplos:

$$\psi(\mathbf{x})\uparrow \textbf{ se puede escribir } \psi(\mathbf{x})\cong\perp.$$

$$\chi(\mathbf{x})\uparrow \rightarrow \psi(\chi(\mathbf{x}))\uparrow \textbf{ se puede escribir } \psi(\perp)\uparrow$$

- FUNCIÓN VACÍA: $\forall$**x**$\in$**A** $\perp\!\!\!\perp$ **(x)**$\cong\perp$

$$[\perp\!\!\!\perp: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}]$$

FUNCIÓN VACÍA

```
begin
    get (X);
    while  X = X  loop
        X  :=  0;
    end  loop;
end;
```

```
(defun VACIA (X)
    (VACIA X)
)
```

IGUALDAD PARCIAL E IGUALDAD ESTRICTA

- La IGUALDAD ESTRICTA sirve para comparar expresiones definidas

[=]

  - Si $\alpha\uparrow$ o $\beta\uparrow$ entonces $\alpha=\beta$ no se cumple

$\psi(x)=\xi(z)$: ambas convergen con el mismo resultado.

- La IGUALDAD PARCIAL permite comparar expresiones, indefinidas o no

[≅]

  - Si $\alpha\uparrow$ y $\beta\uparrow$ entonces $\alpha\cong\beta$
  - Si $\alpha\uparrow$ y $\beta\downarrow$ entonces $\alpha\ncong\beta$
  - Si $\alpha\downarrow$ y $\beta\uparrow$ entonces $\alpha\ncong\beta$
  - Si $\alpha\downarrow$ y $\beta\downarrow$ entonces $\alpha\cong\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

$\psi(x)\cong\xi(z)$: o ambas convergen y son iguales, o ambas divergen

- Relación entre ambas:

$$\alpha\cong\beta \leftrightarrow \alpha=\beta \vee (\alpha\uparrow\wedge\beta\uparrow)$$

$$\alpha=\beta \leftrightarrow \alpha\cong\beta \wedge \alpha\downarrow \wedge \beta\downarrow$$

DOMINIO Y RANGO

- El DOMINIO de ψ: A $\longrightarrow$ B es el conjunto
  $\{ x\in A: \exists y\in B\ \psi(x)=y \} = \{ x\in A: \psi(x)\downarrow \}$

[dom(ψ)]

- El RANGO de ψ: A $\longrightarrow$ B es el conjunto
  $\{ y\in B: \exists x\in A\ \psi(x)=y \}$

[ran(ψ)]

$*$ Ejemplos:

$$\chi(x) \cong \begin{cases} x \bullet x^R & \exists z \in \Sigma^*\ \ x = a \bullet z \bullet b \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathbf{dom(\chi)=\{a\bullet z\bullet b:\ z\in\Sigma^*\}}$$

$$\mathbf{ran(\chi)=\{a\bullet z\bullet bb\bullet z^R\bullet a:\ z\in\Sigma^*\}}$$

$$\phi(x, y) \cong \begin{cases} u \bullet v & \exists z \in \Sigma^*\ (|z| = 3 \wedge \\ & \quad x = z \bullet u \wedge y = z \bullet v) \\ \perp & \neg\exists z \in \Sigma^*\ (|z| = 3 \wedge \\ & \quad \text{prefijo}(z, x) \wedge \text{prefijo}(z, y)) \end{cases}$$

$$\mathbf{dom(\phi)=\{(z\bullet u,z\bullet v):\ z,u,v\in\Sigma^*\wedge|z|=3\}}$$

$$\mathbf{ran(\phi)=\Sigma^*}$$

DOMINIO Y RANGO

```
(defun JI (X)
    (if (and (equal 'a
                    (read-from-string X
                        :start 0 :end 1
                    )
              )
              (equal 'b
                    (read-from-string X
                        :start (- (length X) 1)
                        :end (length X)
                    )
              )
        )
        (format nil "~a~a" X (reverse X) )
        (JI X)
    )
)
```

ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES

- Función FINITA: aquélla cuyo dominio es finito

$$\theta(x) \cong \begin{cases} 2 * x & x^7 - 14 * x^5 - 23 * x^2 - 48 * x = 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

- La función ψ**: A** $\longrightarrow$ **B** es TOTAL si verifica $\forall$**x**$\in$**A** ψ**(x)**$\downarrow$, es decir, si **dom(**ψ**) = A**
  - No deben confundirse los términos *no total* y *parcial*
  - Nombres típicos de funciones totales: **f**, **g**, **h**, **k**, ...
  - Notación **f: A** $\to$ **B**

- Una función *total* **f: A** $\to$ **B** es CONSTANTE si cumple que $\exists$**b**$\in$**B**$\forall$**x**$\in$**A f(x)=b**

- Las funciones de IDENTIDAD:
  - **id: A** $\to$ **A** donde $\forall$**x**$\in$**A id(x)=x**
  - $\mathbf{id^k: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times \ldots \times A_n \to A_k}$, donde $\psi\mathbf{(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_k}$

- PREDICADO: Cualquier función *total* **P: A** $\to$ B

COMPARACIÓN DE FUNCIONES

- Las funciones ψ**,**χ**: A** $\longrightarrow$ **B** también se comparan con la igualdad parcial o con la igualdad estricta
  - $\psi \cong \chi$ quiere decir que $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \psi(\mathbf{x}) \cong \chi(\mathbf{x})$ (son la misma función, coinciden para todos los datos)
  - $\psi \ncong \chi$ quiere decir que $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \psi(\mathbf{x}) \ncong \chi(\mathbf{x})$ (no son la misma función, difieren para algún dato)
  - $\psi = \chi$ quiere decir que $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \psi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x})$ (son la misma función *total*)

COMPARACIÓN DE EXPRESIONES PARCIALES

- La comparacíon de expresiones posiblemente indefinidas es siempre problemática.

  - Las comparaciones de la forma $\alpha \mathbf{C} \beta$ (donde **C** puede ser **<**, **>**, **≤**, **≥** o **≠**) *nunca* se cumplirán cuando $\alpha\uparrow$ o $\beta\uparrow$

  - ¡Cuidado con las expresiones *negadas*!: las negaciones de $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ y $\alpha > \beta$ *no son* $\alpha \neq \beta$, $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \geq \beta$

  - La negación de la igualdad parcial $\cong$ sí es $\ncong$

  - Ejemplos:

$$\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x \bmod 10} & \mathbf{x \geq 5} \\ \perp & \mathbf{c.c.} \end{cases}$$

Son ciertos:	No son ciertos:
$\psi(\mathbf{5}) = \psi(\mathbf{85})$	$\psi(\mathbf{0}) \neq \psi(\mathbf{8})$
$\psi(\mathbf{5}) \leq \psi(\mathbf{37})$	$\psi(\mathbf{2}) \geq \psi(\mathbf{20})$
$\psi(\mathbf{0}) \cong \psi(\mathbf{4})$	$\psi(\mathbf{2}) \leq \psi(\mathbf{20})$
$\psi(\mathbf{3}) \cong \psi(\mathbf{3})$	$\psi(\mathbf{3}) = \psi(\mathbf{3})$
$\psi(\mathbf{2}) \ncong \psi(\mathbf{20})$	$\psi(\mathbf{3}) \neq \psi(\mathbf{3})$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

- Sean ψ**: A** $\longrightarrow$ **B** y χ**: B** $\longrightarrow$ **C**. La COMPOSICIÓN de χ con ψ es la función ξ**: A** $\longrightarrow$ **C** definida como $\xi(\mathbf{x}) \cong \chi(\psi(\mathbf{x}))$

[$\chi \circ \psi$]

$$\psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x/2} & \mathbf{x \bmod 2 = 0} \\ \perp & \mathbf{c.c.} \end{cases}$$

$$\chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{2 * x} & \mathbf{x \bmod 2 = 0} \\ \mathbf{x - 1} & \mathbf{c.c.} \end{cases}$$

$$\chi \circ \psi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{x \bmod 4 = 0} \\ \mathbf{x/2 - 1} & \mathbf{x \bmod 4 \neq 0} \wedge \mathbf{x \bmod 2 = 0} \\ \perp & \mathbf{c.c.} \end{cases}$$

$$\psi \circ \chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{x \bmod 2 = 0} \\ \mathbf{(x - 1) / 2} & \mathbf{c.c.} \end{cases}$$

$$\psi \circ \psi\ (\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{x/4} & \mathbf{x \bmod 4 = 0} \\ \perp & \mathbf{c.c.} \end{cases}$$

COMPOSICION

```
-- JI
begin
    get (X);
    Y := 0;
    while X<>0 loop
        X := X-2;
        Y := Y+1;
    end loop;
    put (Y);
end;
```

```
-- PSI
begin
    get (X);
    if X rem 2 = 0 then
        Y := 2 * X;
    else
        Y := X-1;
    end if;
    put (Y);
end;
```

```
-- JI_con_PSI
begin
    get (X);
    Y := 0;
    while X<>0 loop
        X := X-2;  Y := Y+1;
    end loop;
    if Y rem 2 = 0 then  Z := 2 * Y;
    else  Z := Y-1;
    end if;
    put (Z);
end;
```

COMPOSICIÓN LOCAL

- De forma más general, si tenemos las funciones:

$$\psi\text{: } A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_j \longrightarrow B_k$$

$$\chi\text{: } B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{k-1} \times B_k \times B_{k+1} \times \ldots \times B_n \longrightarrow C$$

una COMPOSICIÓN LOCAL de χ con ψ sobre la k-ésima coordenada es la función:

$$\xi\text{: } B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{k-1} \times A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_j \times B_{k+1} \times \ldots \times B_n \longrightarrow C$$

definida como:

$$\xi(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, x_2, \ldots, x_j, y_{k+1}, \ldots, y_n) \cong \chi(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_j), \ldots, y_n)$$

∗ Ejemplo:

$$\psi(u, v) \cong \begin{cases} u/2 & u \bmod 2 = 0 \\ v + 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\chi(x, y, z) \cong x * y + z$$

La composición de χ con ψ sobre la segunda componente:

$$\xi(x, u, v, z) \cong \begin{cases} x * (u/2) + z & u \bmod 2 = 0 \\ x * (v + 1) + z & \text{c.c.} \end{cases}$$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

- ψ: A $\longrightarrow$ B es INYECTIVA si cumple que $\forall \mathbf{x},\mathbf{z} \in A\ (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \rightarrow \neg\psi(\mathbf{x})=\psi(\mathbf{y}))$
  - ∗ Ejemplos:

La función vacía $\perp\!\!\!\perp$

$$\chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{y} & \mathbf{x = a \bullet y} \\ \perp & \neg\mathbf{prefijo(a, x)} \end{cases}$$

  - ∗ Contraejemplos:

Las funciones constantes

$$\mathbf{f(x,y)=x \bullet y \bullet x}$$

- Es SOBREYECTIVA si verifica que $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{B}\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \psi(\mathbf{x})=\mathbf{y}$, es decir, si $\mathbf{ran}(\psi) = \mathbf{B}$
  - ∗ Ejemplos:

$$\mathbf{g(x,y)=x \bullet y^R}$$

$$\chi(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{y} & \mathbf{x = a \bullet y} \\ \perp & \neg\mathbf{prefijo(a, x)} \end{cases}$$

  - ∗ Contraejemplo:

$$\mathbf{h(x)=a \bullet x}$$

- Es BIYECTIVA si es *total*, inyectiva y sobreyectiva

$$\mathbf{id(x)=x}$$

$$\mathbf{k(x)=x^R}$$

FUNCIÓN INVERSA

♦ Si ψ**: A** $\longrightarrow$ **B** es *inyectiva* llamamos FUNCIÓN INVERSA de ψ a la función definida por los pares **{(y,x)**$\in$**B**$\times$**A:** ψ**(x)=y}**

$$[\psi^{-1}: \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}]$$

∗ ψ^{-1} no tiene sentido si ψ no es inyectiva

∗ ψ^{-1} no tiene sentido (en nuestro contexto) si ψ tiene más de un argumento

∗ ψ puede ser total o no, y ψ^{-1} también

∗ Ejemplos:

$$\perp\!\!\!\perp^{-1} \cong \perp\!\!\!\perp$$

$$\mathbf{id}^{-1} \cong \mathbf{id}$$

$$\chi(\mathbf{x}) \cong \mathbf{a}\bullet\mathbf{x}$$

$$\chi^{-1}(\mathbf{x}) \cong \begin{cases} \mathbf{y} & \mathbf{x} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{y} \\ \perp & \neg\mathbf{prefijo(a,x)} \end{cases}$$

IMAGENES DIRECTA E INVERSA

- Sean ψ**: A** $\longrightarrow$ **B**, **S**$\subseteq$**A** y **T**$\subseteq$**B**

  * IMAGEN DIRECTA de **S** por ψ es el conjunto
    {y$\in$**B:** $\exists$**x**$\in$**S** ψ**(x)=y}**

$$[\psi(S)]$$

  * IMAGEN INVERSA de **T** por ψ es el conjunto
    {x$\in$**A:** $\exists$**y**$\in$**T** ψ**(x)=y}**

$$[\psi^{-1}(T)]$$

  * ψ**(A) = ran(**ψ**)** y ψ^{-1}**(B) = dom(**ψ**)**

  * Ejemplos:

$$\xi(x) \cong \begin{cases} 3 * x/4 & x \bmod 4 = 0 \\ x & x \bmod 2 = 1 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$Q = \{x : x \le 2500\}$$

$$\xi(Q) = \{3 * x : x \le 625\} \cup \{x : x \le 2500 \wedge x \bmod 2 = 1\}$$

$$\xi^{-1}(Q) = \{4 * x : x \le 833\} \cup \{x : x \le 2500 \wedge x \bmod 2 = 1\}$$

$$P = \{x : x \bmod 2 = 0\}$$

$$\xi(P) = \{x : x \bmod 3 = 0\}$$

$$\xi^{-1}(P) = \{x : x \bmod 8 = 0\}$$