<u>CONJUNTOS:</u> Utilizaremos la noción habitual de conjunto. Los conjuntos con los que más trabajaremos serán el conjunto $\mathbb{B}$= {true,false} de los booleanos, el conjunto $\mathbb{N}$= {0,1,2,3,4,5,...} de los números naturales, y el conjunto Σ^* de las palabras sobre un alfabeto finito Σ, así como subconjuntos de estos y productos cartesianos de los mismos (como $\mathbb{N} \times \Sigma^*$ ó Σ^{*3}).

<u>FUNCIÓN (PARCIAL):</u> Sean **A** y **B** dos conjuntos. Una *función (parcial)* de **A** (llamado conjunto de *datos*) a **B** (llamado conjunto de *resultados*) es un subconjunto de pares $\psi \subset A \times B$ que cumple que, para cualquier dato **x**, existe a lo sumo un resultado **y** que forma par con **x** en ψ. Es decir, que cumple $\forall x \in A \ |\{y \in B: (x,y) \in \psi\}| \leq 1$. Una función (parcial) asocia entonces a cada dato un único resultado o ninguno. Para denotar que ψ es una función parcial de **A** a **B** escribimos $\psi: A \dashrightarrow B$. La notación más usual para indicar que $(x,y) \in \psi$ es $\psi(x) \cong y$. Decimos que **y** es el resultado de aplicar la función ψ al dato **x**, o que **y** es la *imagen* de **x** por ψ. Se suelen utilizar consonantes minúsculas del alfabeto griego para nombrar a las funciones: ψ, ϕ, θ, χ, ξ, ...

<u>ARGUMENTOS DE UNA FUNCIÓN:</u> Sea $\psi: A \dashrightarrow B$ una función (parcial). Si **A** es de la forma $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ decimos que ψ tiene *n argumentos*.

<u>CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA:</u> Sea $\psi: A \dashrightarrow B$ una función (parcial). Dado un dato $x \in A$ pueden darse dos situaciones: o bien ψ le asocia un resultado $y \in B$, o no le asocia ninguno. En el primer caso, cuando se verifica $\exists y \in B \ \psi(x) \cong y$ decimos que $\psi(x)$ *converge* o que ψ *está definida sobre x*, y lo denotamos como $\psi(x)\downarrow$. En el segundo, cuando se verifica $\forall y \in B \ \psi(x) \not\cong y$ decimos que $\psi(x)$ *diverge* o que ψ *no está definida sobre x*, y lo denotamos como $\psi(x)\uparrow$.

<u>EL "VALOR INDEFINIDO":</u> Por comodidad, solemos usar el símbolo $\perp$ para indicar el "resultado *indefinido*". Aunque esta expresión es contradictoria, ya que indefinido es sinónimo de ausencia de resultado, este símbolo nos permite escribir algunas expresiones con funciones parciales como si el indefinido fuera un valor como los demás. Por ejemplo, es razonable esperar que la siguiente propiedad se cumpla para cualesquiera funciones y datos: $\chi(x)\uparrow \rightarrow \psi(\chi(x))\uparrow$, es decir, que si el dato de una función ψ es el resultado de otra función χ, y esta segunda no converge, entonces ψ tampoco puede producir un resultado (puesto que no tiene dato alguno sobre el que aplicarse). Con la notación del "valor indefinido" podemos decir simplemente que siempre se cumple $\psi(\perp)\uparrow$. El "valor indefinido" también nos permite expresar alternativamente la divergencia de $\psi(x)$ como $\psi(x)\cong\perp$.

<u>**Función vacía:**</u> Dados los conjuntos **A** y **B**, la función *vacía* $\perp\!\!\!\perp$**:** $A \longrightarrow B$ es la que diverge para todos los datos posibles, es decir, que cumple que $\forall x\in A\ \perp\!\!\!\perp(x)\cong\perp$.

<u>**Igualdad parcial e igualdad estricta:**</u> Hasta ahora, cuando hemos querido decir que dos expresiones son iguales, hemos utilizado el símbolo no estándar $\cong$. Esta excentricidad está motivada por el problema que supone el que una o ambas expresiones sean indefinidas. Si nos encontramos que $\psi(x)\uparrow$ y que $\xi(z)\uparrow$, ¿qué debemos contestar a la pregunta de si $\psi(x)$ y $\xi(z)$ son iguales o no? Por un lado, ambas funciones tienen el mismo comportamiento, pero por otro lado su aplicación no produce resultado, y por tanto no hay nada que comparar. La solución es utilizar dos tipos de igualdad. La *igualdad parcial* $\cong$ considera que dos expresiones divergentes son iguales, y la *igualdad estricta* $=$ (o igualdad a secas) no. Por tanto, si se afirma que $\psi(x)\cong\xi(z)$ pueden pasar dos cosas: o que ambas converjan y produzcan el mismo resultado, o que ambas diverjan. Sin embargo, al aseverar $\psi(x)=\xi(z)$ se está diciendo que ambas expresiones convergen y que, además, producen el mismo resultado. La relación entre ambos comparadores es $\alpha\cong\beta \leftrightarrow \alpha=\beta \vee (\alpha\uparrow\wedge\beta\uparrow)$, o bien $\alpha=\beta \leftrightarrow \alpha\cong\beta \wedge \alpha\downarrow \wedge \beta\downarrow$. En particular,*una expresión indefinida nunca es (estrictamente) igual a nada*, ni siquiera a sí misma, ya que $\neg\perp=\perp$.

<u>**Dominio y rango:**</u> Sea ψ**:** $A \longrightarrow B$ una función (parcial). Llamamos *dominio* de ψ al conjunto de datos sobre los que está definida, es decir, al conjunto $\mathbf{dom}(\psi) = \{\ x\in A\text{: } \exists y\in B\ \psi(x)=y\ \} = \{\ x\in A\text{: } \psi(x)\downarrow\ \}$. Llamamos *rango* de ψ al conjunto de resultados que la función asocia efectivamente a algún dato, es decir, al conjunto $\mathbf{ran}(\psi) = \{\ y\in B\text{: } \exists x\in A\ \psi(x)=y\ \}$.

<u>**Funciones finitas y cofinitas:**</u> Una función *finita* es aquélla cuyo dominio es finito, y una *cofinita* es aquélla cuyo dominio es cofinito.

<u>**Funciones totales y no totales:**</u> El concepto clásico de función exige que esté definida sobre todo el conjunto de datos. En nuesto caso no se lo pedimos, pero si a pesar de todo lo cumple decimos que la función es *total*. Por tanto, decimos que una función (parcial) ψ**:** $A \longrightarrow B$ es total si verifica que $\forall x\in A\ \psi(x)\downarrow$, es decir, si $\mathbf{dom}(\psi) = A$. No debe confundirse los términos *no*

total (que indica que la función está indefinida para al menos un dato) y *parcial* (que sólo indica la posibilidad de que la función esté indefinida). Las funciones totales se suelen nombrar con consonantes minúsculas del alfabeto latino: **f**, **g**, **h**, **k**, ...

<u>FUNCIONES CONSTANTES:</u> Dados los conjuntos **A** y **B**, una función *constante* $\mathbf{f: A \longrightarrow B}$ es la que, aparte de ser total, produce el mismo resultado para todos los datos, es decir, que cumple que $\mathbf{\exists b \in B \forall x \in A\ f(x)=b}$.

<u>FUNCIONES DE IDENTIDAD:</u> Dado el conjunto **A**, la función *identidad* $\mathbf{id: A \longrightarrow A}$ es la que produce como resultado el mismo dato sobre el que se aplica, es decir, que cumple que $\mathbf{\forall x \in A\ id(x)=x}$. Dados los conjuntos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_n}$, también llamamos funciones de identidad a las de la forma $\mathbf{id^k{:}A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times \ldots \times A_n \longrightarrow A_k}$, que al aplicarse sobre sus *n* argumentos producen como resultado el *k*-ésimo de ellos, es decir, que cumplen que $\mathbf{\forall x_1 \in A_1 \forall x_2 \in A_2 \ldots \forall x_n \in A_n\ \psi(x_1,x_2,\ldots x_n)=x_k}$.

<u>PREDICADOS:</u> Dado el conjunto **A**, un *predicado* es cualquier función total de la forma $\mathbf{P: A \longrightarrow \Upsilon}$, es decir, que produzca un resultado booleano.

<u>EXTENSIONES Y RESTRICCIONES:</u> Dadas dos funciones (parciales) $\mathbf{\psi,\chi: A \longrightarrow B}$ decimos que ψ es un *restricción* de χ si $\psi \subseteq \chi$ (como conjunto de pares). Es decir, si $\mathbf{dom(\psi) \subseteq dom(\chi) \wedge \forall x \in dom(\psi)\ \chi(x)=\psi(x)}$. También se dice que χ es una *extensión* de ψ. Podemos expresarlo informalmente diciendo que χ respeta los resultados que ψ allí donde ésta está definida (y luego puede tener su propio comportamiento donde no lo está).

<u>IMAGENES DIRECTA E INVERSA:</u> Sean **A** y **B** dos conjuntos, $\mathbf{\psi: A \longrightarrow B}$ una función (parcial), $\mathbf{S \subseteq A}$ y $\mathbf{T \subseteq B}$. Llamamos *imagen directa* de **S** por ψ al conjunto $\mathbf{\psi(S) = \{y \in B: \exists x \in S\ \psi(x)=y\}}$, es decir, al conjunto de los valores que se pueden obtener como resultado de aplicar la función a datos de **S**. También llamamos *imagen inversa* de **T** por ψ al conjunto $\mathbf{\psi^{-1}(T) = \{x \in A: \exists y \in T\ \psi(x)=y\}}$, es decir, al conjunto de los datos a los que al aplicarles la función resulta un elemento de **T**. Por ejemplo, $\mathbf{\psi(A) = ran(\psi)}$, y $\mathbf{\psi^{-1}(B) = dom(\psi)}$.

<u>COMPARACIÓN DE FUNCIONES:</u> Lo que se ha comentado sobre la igualdad también es aplicable para comparar funciones en su globalidad. Si $\mathbf{\psi,\chi: A \longrightarrow B}$, y decimos que $\psi \cong \chi$, estamos expresando que $\mathbf{\forall x \in A\ \psi(x) \cong \chi(x)}$. Es decir, que ambas funciones tienen el mismo comportamiento para todos los datos

posibles, tanto si están definidas como si no: o ambas convergen produciendo el mismo resultado, o ambas divergen.. Por el contrario, si decimos que $\psi=\chi$, lo que estamos expresando es que $\forall x\in \mathbf{A}\ \psi(x)=\chi(x)$, es decir, que ambas funciones convergen para todos los datos posibles produciendo el mismo resultado. Por tanto, afirmamos que ambas son totales. De modo análogo, para expresar que dos funciones son distintas (es decir, que no son la misma función) escribiremos $\psi\ncong\chi$. Ello puede suceder porque una esté definida donde la otra no lo esté (que su dominio no coincida) o porque produzcan resultados diferentes para algún dato concreto. Nunca usaremos la expresión $\psi\neq\chi$.

Comparación de expresiones parciales: El problema de comparar expresiones en las que aparecen funciones potencialmente indefinidas se da con todos los comparadores. Al igual que con la igualdad, la interpretación que haremos será restrictiva. Es decir, que las comparaciones de la forma $\alpha\mathbf{C}\beta$ (donde $\mathbf{C}$ es un comparador cuialquiera, como $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ o $\neq$) sólo se cumplirán cuando $\alpha\downarrow$ y $\beta\downarrow$. Hay que tener especial cuidado cuando las expresiones de este tipo aparecen *negadas*, ya que su significado es diferente del habitual. En particular, las negaciones de $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$ y $\alpha>\beta$ no son $\alpha\neq\beta$, $\alpha\leq\beta$ y $\alpha\geq\beta$, porque cuando una de las dos expresiones comparadas es indefinida, son falsas todas las comparaciones. Esto no sucede con la igualdad parcial $\cong$, ya que su negación sí es el comparador $\ncong$.

Composición de funciones: Dadas dos funciones (parcials) $\psi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $\chi\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$, llamamos *composición* de χ con ψ a la función $\chi\circ\psi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ que produce el resultado $\chi\circ\psi(x)\cong\chi(\psi(x))$ al ser aplicada sobre cualquier dato x. De forma más general, si $\psi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}_k$ y $\chi\colon\ \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2\times\ldots\times\mathbf{B}_k\times\ldots\times\ \mathbf{B}_n \longrightarrow \mathbf{C}$, llamamos *composición local* de χ con ψ a la función $\xi\colon \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2\times\ldots\times\mathbf{A}\times\ldots\times \mathbf{B}_n \longrightarrow \mathbf{C}$ que produce el resultado $\xi(y_1,y_2,\ldots,y_{k-1},x,y_{k+1},\ldots,y_n)\cong\chi\ (y_1,y_2,\ldots,y_{k-1},\psi(x),y_{k+1},\ldots,y_n)$.

Funciones inyectivas y sobreyectivas: Decimos que una función (parcial) $\psi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es *inyectiva* si no produce resultados iguales al ser aplicada a datos diferentes. Es decir, si cumple que $\forall x,z\in \mathbf{A}\ (x\neq y \rightarrow \neg\psi(x)=\psi(y)$. En la definición de función inyectiva utilizamos con cuidado los operadores de igualdad y desigualdad, de forma que el que no esté definida para algún dato no sea un obstáculo para la inyectividad. De hecho, la función vacía $\perp\!\!\!\perp$ es inyectiva. Decimos que es *sobreyectiva* si todo valor posible de $\mathbf{B}$ se puede obtener como resultado de aplicar a algún dato de **A**. Es decir, si verifica que $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{B}\ \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}\ \psi(\mathbf{x})=\mathbf{y}$, o, lo que es lo mismo, que $\mathbf{ran}(\psi) = \mathbf{B}$. Como antes, una función sobreyectiva no tiene por qué ser total. Por ello, los conceptos de inyectividad y sobreyectividad son análogos, pero no idénticos, a los clásicos.

FUNCIONES BIYECTIVAS: Decimos que una función es *biyectiva* si es total, inyectiva y suprayectiva. En este caso sí que tenemos que añadir la condición de totalidad, puesto que interesa mantener el concepto clásico de biyectividad.

FUNCIÓN INVERSA: Dada una función (parcial) inyectiva $\psi\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, llamamos función inversa de ψ (y la denotamos por $\psi^{-1}\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$) a la función definida por los pares $\{(\mathbf{y},\mathbf{x}) \in \mathbf{B}\times\mathbf{A}\colon \psi(\mathbf{x})=\mathbf{y}\}$. La definición de ψ^{-1} no tiene sentido si ψ no es inyectiva, pero ψ puede ser total o no, y a ψ^{-1} le ocurre otro tanto. Por ejemplo, $\perp\!\!\!\perp^{-1} \cong \perp\!\!\!\perp$. A pesar de la desafortunada similitud de la notación, nunca deben confundirse función inversa e imágen inversa. Por ejemplo, $\psi^{-1}(\mathbf{y})$ (el resultado de aplicar la función inversa ψ^{-1} al elemento **y** de **B**) sólo tiene sentido si ψ es inyectiva, y es un valor de **A** o indefinido. Por el contrario, $\psi^{-1}(\{\mathbf{y}\})$ (la imágen inversa del subconjunto $\{\mathbf{y}\}$ de **B** por la función ψ) siempre tiene sentido, y es un subconjunto de **A**, que puede contener cualquier número de elementos, incluido ninguno.