5.4. Ariketak

5.1. (i) Frogatu $\mathbb{P}^2$-ko edozein bi puntutatik gutxienez zuzen bat pasatzen dela. Gainera, bi puntuak, $P = (a : b : c)$ eta $P' = (a' : b' : c')$, desberdinak badira, orduan zuzen hori bakarra da eta haren ekuazioa ondorengo determinanteak ematen digu:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) Frogatu $\mathbb{P}^2$-ko edozein 5 puntutatik gutxienez konika bat pasatzen dela, eta edozein 9 puntutatik gutxienez kubika bat. Hedatu emaitza hori m mailako kurba orokor baten kasura.

5.2. Frogatu $\mathbb{P}^2$-ko bi edozein zuzen desberdinek ebakitze-puntu bat (eta bakarra) dutela.

5.3. Aurkitu $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$ eta $(1 : 2 : 3)$ puntuetatik pasatzen den konika bat. Frogatu bakarra dela eta, $\operatorname{char} K \neq 2, 3$ bada, irreduziblea dela.

5.4. Demagun $\operatorname{char} K \neq 2$ dela. Frogatu $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ eta $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$ zazpi puntuetatik pasatzen diren kubikek ondorengo ekuazioa dutela: $\lambda X(Y^2 - Z^2) + \mu Y(Z^2 - X^2) + \nu Z(X^2 - Y^2) = 0$, $\lambda, \mu, \nu \in K$ izanik, ez guztiak zero. Zehaztu $\mathbb{P}^2$-ko beste bi puntu, bederatzi puntu horietatik pasatzen den kubika bakar bat egon dadin.

5.5. Izan bedi K aljebraikoki itxia. Eman $\mathbb{P}^2$-ren ondorengo azpimultzo aljebraikoei dagozkien ideal homogeneoak, eta aurkitu multzo horien osagai irreduzibleak.

(i) $\{(0 : 0 : 1)\}$.
(ii) $\{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$.
(iii) $(1 : 0 : 0)$ eta $(0 : 1 : 0)$ lotzen dituen zuzena.
(iv) $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ eta $(0 : 0 : 1)$ lotzen dituzten hiru zuzenen bildura.

5.6. Aurreko ariketako galdera berak erantzun $\mathbb{P}^3$-ren ondorengo azpimultzo aljebraikoetarako (berriro ere K aljebraikoki itxia izanik).

(i) $\{(1 : 2 : 3 : 4)\}$.
(ii) $\{(1 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 1)\}$.
(iii) $(1 : 1 : 0 : 0)$ eta $(0 : 0 : 1 : 1)$ lotzen dituen zuzena.
(iv) $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$ eta $(0 : 0 : 1 : 0)$ puntuetatik pasatzen den planoa.
(v) $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ eta $(0 : 0 : 0 : 1)$ puntuek zehazten dituzten zuzenen bildura.

(vi) $(1:0:0:0)$, $(0:1:0:0)$, $(0:0:1:0)$ eta $(0:0:0:1)$ puntuek zehazten dituzten planoen bildura.

5.7. Demagun K aljebraikoki itxia dela eta $\operatorname{char} K \neq 2$ dela. Frogatu $V_+(X^2 - Z^2, X^2Y - XZ^2 - XYZ + Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2$ multzo aljebraiko proiektiboaren osagai irreduzibleak zuzen bat eta puntu bat direla.

5.8. Frogatu $\mathbb{P}^n$-ko puntuak multzo aljebraikoak direla, eta ondorioztatu $\mathbb{A}^n$-ren Y azpimultzo finitu baten itxidura proiektiboa Y-rekin bat datorrela.

5.9. Izan bitez $V, W \subseteq \mathbb{A}^n$ multzo aljebraikoak. Frogatu $(V \cap W)^* \subseteq V^* \cap W^*$ betetzen dela, eta ikusi partekotasuna hertsia izan daitekeela, adibide baten bitartez. (Bilatu $\mathbb{A}^2$-n.)

5.10. Demagun $f_1, \ldots, f_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ polinomio homogeneoak direla (ez derrigorrean maila berekoak) eta jarri $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$. Orduan $\mathfrak{a}^* = (f_1, \ldots, f_r)$ dugu. Ohartu, hala ere, ideal hori ez dela $\mathfrak{a}$-ren berdina, $K[X_0, \ldots, X_n]$-n sortutako ideala baita. (Laguntza: Izan bedi $g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \in \mathfrak{a}$. Ohartu g-ren osagai homogeneo guztiak $f_1, \ldots, f_r$ polinomioen konbinazioak direla, eta ondorioztatu $g^* \in (f_1, \ldots, f_r)$ dela.)

5.11. Izan bedi K aljebraikoki itxia. $\mathbb{A}^2$-ren ondorengo multzo aljebraiko bakoitzeko, eman bere itxidura proiektiboaren infinituko puntuak.

(i) $X = a$ zuzen bertikala.
(ii) $Y = b$ zuzen horizontala.
(iii) $Y = aX + b$ zuzena.
(iv) $Y = X^2$ parabola.
(v) $Y^2 - X^2 = 1$ hiperbola.
(vi) $XY = 1$ hiperbola.
(vii) $Y^2 = X^3 - X$ kubika.
(viii) $X^3 + Y^3 = 3XY$, *Descartesen foliuma*.
(ix) $(X^2 + Y^2)^2 = X^2(1 + Y^2)$.
(x) $X^2(1 - X) = 3Y^2(X + 3)$.

5.12. Izan bedi K aljebraikoki itxia. $\mathbb{A}^3$-ren ondorengo multzo aljebraiko bakoitzeko, eman bere itxidura proiektiboaren infinituko puntuak.

(i) $Y = X^2$ zilindro parabolikoa.
(ii) $Z = X^2$ zilindro parabolikoa.
(iii) Aurreko bien ebakidura.
(iv) $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in K\}$ *kubika bihurria*.
(v) $X^2 + Y + Z = 0$, $Y^2 + X + Z = 0$ eta $Z^2 + X + Y = 0$ gainazalen ebakidura.

5.13. Izan bedi $\mathfrak{a} = (Y + X^2, X)$, $K[X, Y]$-ren ideala. Frogatu zuzenean, Gröbnerren oinarriak erabili gabe, $\mathfrak{a}^* = (X, Y)$ dela. Bestalde, 3. gaiko 3.14 ariketa erabiliz, garbi dago $Y + X^2$ eta X sortzaileek $\mathfrak{a}$-ren Gröbnerren oinarri bat osatzen dutela lex ordenarekiko, $Y > X$ aukeratuz gero. Beraz, polinomio horien homogeneizatuak $\mathfrak{a}^*$-ren sortzaileak dira. Baina $(YZ + X^2, X)$ ez da (X, Y)-ren berdina! Nola azaldu daiteke itxurazko kontraesan hori?