2.Gaia: Probabilitatea

Cristina Alcalde - Arantxa Zatarain

Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoa - UPV/EHU

Aldakuntzak

Definizioa

Izan bedi $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ m elementu desberdinak dituen multzoa. n-naka hartutako m elementuen aldakuntzak ($n \leq m$) n elementuen azpimultzo ordenatuak dira.
Bi aldakuntza desberdinak dira elementu desberdinak edo elementu berdinak baina ordena desberdinetan dituztenean.

Adibidea:
Binaka hartutako $\{a, b, d\}$ elementuen aldakuntzak hauek dira:

$$\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, a\}, \{b, d\}, \{d, a\}, \{d, b\}$$

Aldakuntzen kopurua

Teorema

Izan bedi $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ m elementu desberdinak dituen multzoa. n-naka hartutako m elementu desberdinen aldakuntzen kopurua hau da

$$A_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Adibidea:
Hiru zifra ezberdinduen zenbat zenbaki lor daiteke 1,3,5,7,9 zifrekin?

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Permutazioak

Definizioa

Izan bedi $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ m elementu desberdinak dituen multzoa. m elementu hauen ordenamendu bakoitzari permutazio deitzen zaio.

Adibidea:
$\{a, b, d\}$ elementuen permutazioak hauek dira:

$$\{a, b, d\}, \{a, d, b\}, \{b, a, d\}, \{b, d, a\}, \{d, a, b\}, \{d, b, a\}$$

Permutazioen kopurua

Propietatea

Permutazioak m-naka hartutako m elementuen aldakuntzak dira.

$$P_m = A_{m,m} = m!$$

Adibidea:
Bost zifra ezberdinduen zenbat zenbaki lor daiteke 1,2,3,4,5 zifrekin?

$$P_5 = A_{5,5} = 5! = 120$$

Konbinazioak

Definizioa

Izan bedi $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ m elementu desberdinak dituen multzoa. n-naka hartutako m elementu desberdinen konbinazioak n elementu dituen azpimultzo guztiak dira.
Bi konbinazio desberdinak dira gutxienez elementu desberdin bat dutenean.

Adibidea:
A,B,D,E elementuen artean bi elementu aukeratzeko era guztiak:

$$AB, \quad AD, \quad AE, \quad BD, \quad BE, \quad DE$$

Konbinazioen kopurua

Teorema

n-naka hartutako m elementuen konbinazioen kopurua ($n \leq m$) hau da:

$$K_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} =$$
$$= \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}$$

Adibidea:
Azterketa baten 10 galderetatik 8 erantzun behar ditugu. Zenbat aukera daude?

$$K_{10,8} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Errepikatuzko Aldakuntzak

Definizioa

Izan bitez $a_1, a_2, \ldots, a_m$ errepika daitezkeen m elementu desberdinak. Orduan n-naka hartutako m elementuen errepikatuzko aldakuntzak n elementuak hartuz (n m baino handiagoa izan daiteke) lor daitezkeen azpimultzo ordenatu guztiak dira, non elementuak berdinak izan daitezkeen.
Bi errepikatuzko aldakuntza ezberdinak dira elementu ezberdinak dituztenean edo elementu berdinak baina ordena desberdinetan.

Adibidea:
$\{1, 1, \ldots, 2, 2, \ldots, 3, 3 \ldots, 4, 4, \ldots\}$ elementuen 4.errepikatuzko aldakuntzak:

$$(1, 1, 1, 1), (2, 2, 3, 3), (2, 3, 3, 2), (1, 2, 3, 2) \ldots$$

Errepikatuzko aldakuntzen kopurua

Teorema

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ m elementuak infinituki errepika daitezkeenen elementuak harturik n-naka hartutako m elementuen errepikatuzko aldakuntzen kopurua hauxe da:

$$A'_{m,n} = m^n$$

Adibidea:
Zenbat futbol-kiniela ezberdinak bete daitezke?

$$A'_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907$$

Errepikatuzko Permutazioak

Definizioa

Izan bedi ondorengo elementuen multzoa:

$$a_1, a_1 \overset{\alpha_1}{\ldots}, a_1, a_2, a_2 \overset{\alpha_2}{\ldots}, a_2, \ldots a_m, a_m \overset{\alpha_m}{\ldots}, a_m | \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_m = n$$

Multzo honen elementuen ordenamendu posible guztiak n elementu hauen errepikatuzko permutazioak dira.

Adibidea:
$\{a, a, a, b\}$ elementuen permutazioak:

$$(aaab), (aaba), (abaa), (baaa)$$

Errepikatuzko permutazioen kopurua

Teorema

Izan bedi ondorengo elementuak

$$a_1, a_1 \overset{\alpha_1}{\ldots}, a_1, a_2, a_2 \overset{\alpha_2}{\ldots}, a_2, \ldots a_m, a_m \overset{\alpha_m}{\ldots}, a_m | \; \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_m = n$$

Elementu hauek erabiliz lor daitezkeen permutazioen kopurua hauxe da:

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_m!} = \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$$

Adibidea:
Matematika hitzaren letrak erabiliz forma daitezkeen hitz desberdinen (nahiz eta zentzu gabeak izan) kopurua:

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = \frac{3628800}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 151201$$

Errepikatuzko permutazioen aplikazioa

Teorema

Izan bitez:

- *A n elementuen multzoa*
- $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N} \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$
- *A_i azpimultzoaren elementuen kopurua n_i da $i = 1, \ldots r$*

Orduan, $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ motako A multzoaren partiketa ordenatu guztien kopurua hauxe da:

$$\binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_m!}$$

Errepikatuzko permutazioen aplikazioa

Adibidea:
Zenbat eratan bana daitezke 12 ikasle 3 taldetan A_1, A_2 eta A_3, talde bakoitzean 4 ikasle egoteko?

(A_1, A_2, A_3) partiketa ordenatuen kopurua: $\binom{12}{4,4,4} = 34650$

Taldeak ordenatzeko erak $3! = 6$ dira, beraz: $\frac{34650}{6} = 5775$

Errepikatuzko Konbinazioak

Definizioa
Izan bedi $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ m elementu desberdinen multzoa. n. mailako errepikatuzko konbinazioak lor daitezkeen n elementuen multzo guztiak dira, non elementuak behin baino gehiagotan ager daitezkeen
Bi errepikatuzko konbinazio berdinak dira elementu berdinak aldi berdinez osaturik badaude

Adibidea:
$\{a, b, d, e\}$ multzoaren 2. mailako errepikatuzko konbinazioak:

$$(a, a), (a, b), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e), (d, d), (d, e), (e, e)$$

Errepikatuzko konbinazioen kopurua

Teorema
$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ m elementu desberdinen multzoa. n. mailako errepikatuzko konbinazioen kopurua hau da:

$$K'_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$$

Adibidea:
Hiru zifradun zenbakien (000-tik 999-raino) digituak batuz, zenbat emaitza desberdin lor daitezke?

$$K'_{10,3} = \binom{10+3-1}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$$

Zorizko saiakuntzak. Lagin espazioa

Definizioa
E saiakuntza, zorizko saiakuntza da (edo saiakuntza aleatorioa) honako propietateak betetzen direnean:

- *Saiakuntza behin eta berriz errepika daiteke baldintza berdinetan.*
- *Saiakuntza egiten dugun bakoitzean lagin-espazioko emaitza lortzen da, hau da, aukera posibleak ezagunak dira.*
- *Saiakuntza bera bi aldiz egiten badugu, ez da derrigorrezkoa emaitza berdina lortzea. Beste era baten adierazita, guk ezin dugu erabaki emaitza.*
- *Saiakuntza infinituki errepikatzen bada emaitza bakoitzaren maiztasun erlatiboa egonkortzen da.*

Gertaerak

Definizioa
S, E zorizko saiakuntzaren, lagin espazioko edozein azpimultzo, gertaera da. S-ren edozein elementu oinarrizko gertaera edo puntua da.

Gertaerak

Definizioa
A eta B bi gertaera baldin badira, bien arteko bildura:
$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ edo } x \in B\}$

Definizioa
A eta B bi gertaera baldin badira, bien arteko ebakidura:
$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A\text{eta } x \in B\}$

Definizioa
A gertaeraren osagarria:

$$\bar{A} = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

Gertaerak

Definizioa

A gertaera, ezinezko gertaera da inoiz gertatzen ez denean saiakuntzan:

$$A \cap S = \emptyset$$

Definizioa

A gertaera, segurua da beti ematen denean saiakuntzan:

$$A \cap S = S$$

Definizioa

A, gertaera probablea da ezinezkoa edo/eta segurua ez denean.

Probabilitatea maiztasun erlatiboaren limitea bezala

Definizioa

Richard von Misses E zorizko saiakuntza, S bere lagin-espazioa eta $A \subset S$ gertaera izanik, A gertaera $f(A)$ aldiz gertatzen bada E-ren n proba egiten direnean, A gertaeraren probabilitatea, $P(A)$ limite hau da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(A)}{n}$$

Definizio axiomatikoa Cramer-Kolmogorov

Definizioa

Izan bitez S saiakuntzaren lagin-espazioa eta A gertaera, probabilitatea baldintza hauek betetzen dituen funtzio errealari deitzen zaio

$$P\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$$

I axioma $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset S$

II axioma $P(S) = 1$

III axioma $A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots$ *S-ko gertaerak binaka bateraezinak badira,* $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$

Propietateak

Definizioaren ondorioak:

1. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2. $\emptyset$ ezinezko gertaera baldin bada $\Rightarrow P(\emptyset) = 0$
3. $\forall A \subset S \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

Laplaceren erregela

S gertaera segurua binaka bateraezinak diren gertaera bakunen bildura bezala adieraz dezakegunean, hau da,

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$$

betetzen bada eta $B_i = B_i \cup \emptyset$ eran bakarrik deskonposa daitekeenean, A gertaera, era hoetan adieraz dezakeku:

$$A = \bigcup_{j=1}^{r} B_{i_j}$$

eta bere probabilitatea

$$P(A) = \sum_{j=1}^{r} P(B_{i_j})$$

Laplaceren erregela

Definizioa

Gertaera bakunak probabilitate berdina badute

$$P(S) = 1 = \sum_{i=1}^{m} P(B_i) = mP(B_i) \Longrightarrow P(B_i) = \frac{1}{m}$$

betetzen delako Laplaceren erregela lortzen dugu:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{r} P(B_{i_j}) = r \cdot P(B_i) = \frac{r}{m}$$

hau da, gertaera baten probabilitatea aldeko kasuak zati kasu posibleak da, probabilitate berdinekoak direnean.

Gertaera bateragarriak

Definizioa

S lagin-espazioko A eta B gertaera bateraezinak dira, $A \cap B = \emptyset$ denean eta $A \cap B \neq \emptyset$ denean bateragarriak.

Gertaera bateraezinak

Teorema

S lagin-espazioko $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gertaerak binaka bateraezinak badira orduan,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Bilduraren probabilitatea

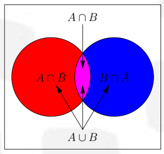
Teorema

Izan bitez A eta B S lagin-espazioko bi gertaera bateragarriak, orduan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bilduraren probabilitatea

Frogapena:



Aurreko teorema aplikatuz:
$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$
$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$
Beraz

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P((A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A \cup B)$$

Bilduraren probabilitatea

Ariketa:
Aurreko teorema hiru gertaeren kasurako frogatu.

$$P(A \cup B \cup D) = P(A) + P(B) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap D) - P(B \cap D) + P(A \cap B \cap D)$$

Ebazpena:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup D) &= P((A \cup B) \cup D) = P(A \cup B) + P(D) - P((A \cup B) \cap D) = \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(D) - P((A \cap D) \cup (B \cap D)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(D) - P(A \cap B) - \\
&- (P((A \cap D) + P(B \cap D) - P(A \cap D) \cap (B \cap D)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap D) - P(B \cap D) + P(A \cap B \cap D)
\end{aligned}$$

Bilduraren probabilitatea

Teorema

(Orokorpena): Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_n$ S lagin-espazioaren gertaera bateragarriak, orduan

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \\
&+ \sum_{i<j<k} (A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n)
\end{aligned}$$

Bilduraren probabilitatea

Adibidea:
Motor batek ez funtzionatzeko zergatiak hiru mailatan saila daitezke, A, B, D. Maila hauek independente direla suposatzen da. Motorra erabilpenaren lehenengo urtean hondatzeko posibilitatea A kausagatik 0.1 da eta B eta D-gatik 0.2 eta 0.3 hurrenez hurren. Motorra lehenengo urtean hondatzeko probabilitatea kalkulatu.

Ebazpena:
Aurreko teorema aplikatuz:

$$\begin{aligned}&P(A \cup B \cup D) = \\ &= P(A) + P(B) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap D) - P(B \cap D) + P(A \cap B \cap D) = \\ &= 0.1 + 0.2 + 0.3 - (0.1 \times 0.2) - (0.1 \times 0.3) - (0.2 \times 0.3) + (0.1 \times 0.2 \times 0.3) = \\ &\qquad = 0.1 + 0.2 + 0.3 - 0.02 - 0.03 - 0.06 + 0.005 = 0.496\end{aligned}$$

Probabilitate baldintzatua

Definizioa
Izan bitez A eta B S-ren bi gertaera. Orduan B gertaera gertatu dela jakinik A gertaera gertatzeko dagoen probabilitatea $P(A/B)$ eran adierazten da eta hauxe da:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A/B)$ A-ren B-rekiko probabilitate baldintzatua da.

Probabilitate baldintzatua horrela adierazten da ere:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Gertaera independenteak

Definizioa
Izan bitez A eta B S lagin-espazioaren bi gertaera.

1. *A B-rekiko independentea dela esango dugu* $\iff P(A/B) = P(A)$
2. *A B-rekiko dependentea dela esango dugu* $\iff P(A/B) \neq P(A)$

Probabilitate baldintzatua

Teorema
Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_n$ S unibertsoaren gertaerak.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Ondorioa:
Aurreko teoremaren gertaerak elkarren artean independenteak badira,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n)$$

Probabilitate totalaren teorema

Teorema
Izan bitez S E zorizko saiakuntzaren lagin-espazioa, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ S-ren partiketa bat, B S-ren edozein gertaera eta $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ eta $P(B/A_i), i = 1, \ldots, n$ ezagutzen diren probabilitateak, orduan

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Probabilitate totalaren teorema

Frogapena:

$$P(B) = P(B \cap S) = P(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

Banatze propietatea erabiliz

$$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cap (B \cap A_n))$$

A_i gertaerak elkarren arteak bateraezinak direnez $B \cap A_i$ gertaerak ere:

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)\end{aligned}$$

Bayes-en teorema

Teorema
Aurreko teoremaren baldintza berdinak betetzen badira,

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Frogapena:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B)P(A_i/B) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

Eta probabilitate totalaren teorema aplikatuz:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$