KALKULU: AUTOEBALUAZIO AZTERKETA

EBAZPENA

1. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo funtzioaren izate-eremua:

a) $f(x)=\sqrt{|x-2|-|x+2|}$

Ebazpena:

$$D\left(f(x)=\sqrt{|x-2|-|x+2|}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-2|-|x+2|\geq 0\right\}$$

Inekuazioa ebazteko, lehenengo balio absolutuak deskonposatu behar dira.

$|x-2|=\begin{cases}x-2 & ,\ x\geq 2\\ -(x-2), & x\leq 2\end{cases}$ eta $|x+2|=\begin{cases}x+2 & ,\ x\geq -2\\ -(x+2), & x\leq -2\end{cases}$

Taula batean, zuzen errealaren arabera, bakoitzaren deskonposaketa adieraztea lagungarria izango da:

$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-2\rvert-\lvert x+2\rvert$	4	$-2x$	-4
	-∞	-2	2 ∞
$\lvert x-2\rvert-\lvert x+2\rvert\geq 0$	$4\geq 0$ *Bai*	$-2x\geq 0$ $x\leq 0$	$-4\geq 0$ *Ez*

Beraz, $|x-2|-|x+2|\geq 0\rightarrow -\infty<x\leq 0$ eta ondorioz,

$$D\left(f(x)=\sqrt{|x-2|-|x+2|}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-2|-|x+2|\geq 0\right\}=(-\infty,0]$$

2. ARIKETA:

Irudikatu $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$ funtzioaren adierazpen grafikoa espazio errealean

---

Ebazpena:

1. pausoa: funtzioaren izate-eremua lortu:

Funtzio arrazionala denez, izate-eremu errealean egongo ez diren puntuak izendatzailea deuseztatzen dutenak dira:

D ($f(x)$) = $\mathbb{R}$-{-1}

2. pausoa: funtzioaren simetria eta periodikotasuna aztertu:

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^3}=\frac{-x}{1-x^3}\neq f(x)$$

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^3}=\frac{-x}{1-x^3}\neq -f(x)$$

Beraz, funtzioak ez dauka simetriarik, eta funtzio arrazionala denez, ez da periodikoa izango.

3. pausoa: funtzioak ardatzetan dituen ebakidura-puntuak lortu:

- Ebakidura-puntuak y ardatzean (x=0):

  x=0 bada, orduan $f(0)=\dfrac{0}{1+(0)^3}=0$, beraz, (x,y)=(0,0) puntuan, hau da, jatorrian ebakiko du

- Ebakidura-puntuak x ardatzean (y=0):

  y=0 bada, orduan $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}=0$, beraz, berriz ere (x,y)=(0,0) puntua lortu dugu

4. pausua: asintotak

- x= -1 denean funtzioak asintota bertikala du:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{1+x^3}=\infty$$

$x\to -1^-$ denean : $f(x)\to\infty$

$x\to -1^+$ denean: $f(x)\to -\infty$

- x= 0 denean funtzioak asintota horizontala du:

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x}{1+x^3}=0$$

5. pausua: funtzioaren maximoak eta minimoak eta tarte gorakorrak eta beherakorrak

Funtzioaren maximo eta minimo posibleak funtzioaren lehenengo deribatua deuseztatzen duten balioak dira:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1+x^3\right)-x\cdot 3x^2}{\left(1+x^3\right)^2}=\frac{1-2x^3}{\left(1+x^3\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=0.7937$$

Puntu hori maximo, minimo edo inflexio puntu bat den jakiteko, $x=1/\sqrt[3]{2}$ puntu hori funtzioaren bigarren deribatuan ordezkatuko dugu:

$$f''(x)=\frac{-6x^2\cdot\left(1+x^3\right)^2-\left(1-2x^3\right)\cdot 2\left(1+x^3\right)\cdot 3x^2}{\left(1+x^3\right)^4}=\frac{-12x^2+6x^5}{(1+x^3)^3}$$

$f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=-1.6799<0$ denez maximoa da.

Beraz, P(x=0.7937 , y=0.529) puntuan maximo bat daukagu

Funtzioa noiz den gorakorra eta noiz beherakorra jakiteko tarte desberdinak egiten dira balio maximoa eta domeinuan ez dagoena erabiliz. Tarte bakoitzeko balio bat hartzen da eta lehenengo deribatuan daukan balioaren arabera gorakorra (>0) edo beherakorra (<0) izango da:

$f'(-2)=\frac{1-2\cdot(-2)^3}{\left(1+(-2)^3\right)^2}>0\Rightarrow(-\infty,-1)$ tartean funtzioa gorakorra da.

$f'(0.1)=\dfrac{1-2\cdot 0.1^3}{\left(1+0.1^3\right)^2}>0 \Rightarrow \left(-1,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ tartean funtzioa gorakorra da

$f'(2)=\dfrac{1-2\cdot 2^3}{\left(1+2^3\right)^2}=\dfrac{-15}{81}<0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\infty\right)$ tartean funtzioa beherakorra da

gorakorra gorakorra beherakorra

$-\infty$ ... $x=-1$ ... $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ... ∞

6. pausua: funtzioaren inflexio puntuak, ganbiltasuna eta ahurtasuna

Funtzioaren inflexio puntu posibleak funtzioaren bigarren deribatua deuseztatzen duten balioak dira:

$$f''(x)=\frac{-12x^2+6x^5}{(1+x^3)^3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{2}=1.25992 \\ x=0 \end{cases}$$

Hirugarren deribatuan ordezkatuz inflexio puntuak diren ikusiko dugu:

$$f'''(x)=\frac{6x(4-19x^3+4x^6)}{(1+x^3)^4}=\frac{-24x+114x^4-24x^7}{(1+x^3)^4}$$

$f'''\left(\sqrt[3]{2}\right)=1.67989\neq 0$, beraz, $x=\sqrt[3]{2}$ inflexio puntua da

$f'''(0)=0$, beraz, $x=0$ puntua ez da inflexio puntu bat

Funtzioa noiz den ahurra eta noiz ganbila aztertuko dugu, honetarako tarte desberdinak egingo ditugu inflexio puntua eta domeinuan ez dagoen balioa erabiliz.

$f''(-2)>0 \Rightarrow (-\infty,-1)$ tartean funtzioa ahurra da

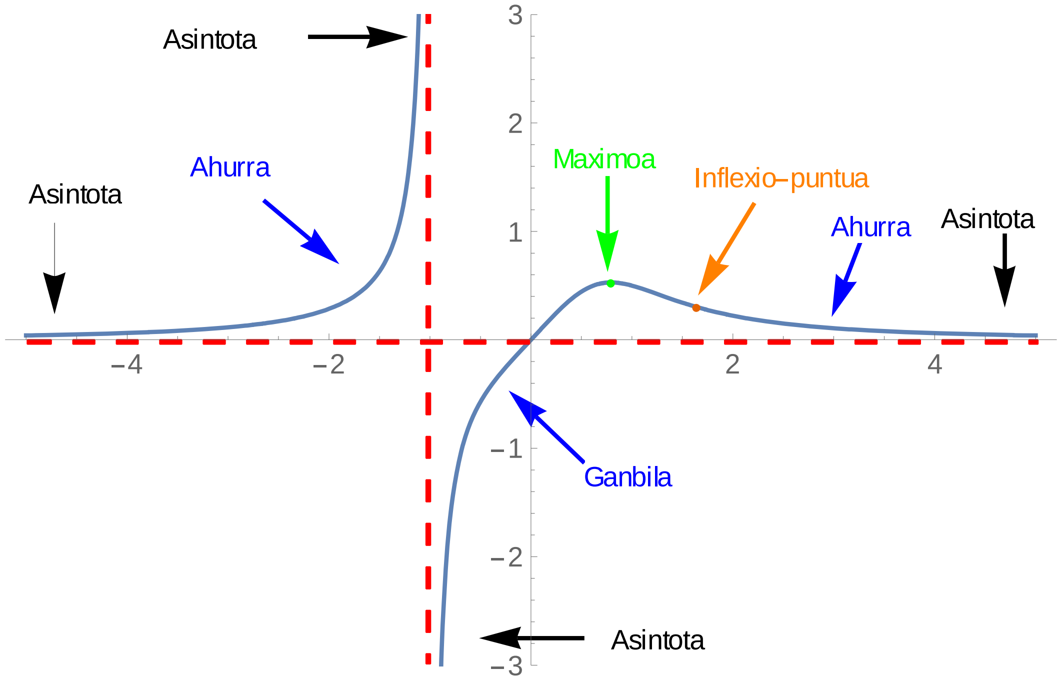
$f''(1)<0 \Rightarrow \left(-1,\sqrt[3]{2}\right)$ tartean funtzioa ganbila da

$f''(2)>0 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{2},\infty\right)$ tartean funtzioa ahurra da

ahurra ganbila ahurra

$-\infty$ ... $x=-1$ ... $x=\sqrt[3]{2}$ ... ∞

7. pausua: funtzioaren adierazpen grafikoa


Asintota
Ahurra
Asintota
Maximoa
Inflexio–puntua
Ahurra
Asintota
Ganbila
Asintota
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−2
2
4

3. ARIKETA:

Deduzitu $\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ biderkaduraren adierazpen orokorra, angeluen baturaren eta kenduraren arrazoi trigonometrikoetatik abiatuz.

Ebazpena:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad (2)$$

eta 1) eta (2) batuz:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

4. ARIKETA:

Ebatzi honako ekuazio hau: $-3\sin(x)+\cos^2(x)=3, \quad x\in\mathbb{R}$.

Ebazpena:

$$-3\sin(x)+\cos^2(x)=3 \to -3\sin(x)+1-\sin^2(x)=3 \ \ \sin^2(x)+3\sin(x)+2=0$$

Beraz,

$$\sin(x)=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$$

$$\sin(x)=-1 \to x=3\pi/2+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$\sin(x)=-2 \to$ Ezinezkoa, x erreala denean, $-1\le\sin(x)\le 1$ betetzen delako.

5. ARIKETA

Hurrengo funtzioaren deribatua kalkulatu

$$f(x) = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{e} + e^{x^2}\right)^5}$$

Ebazpena:

$f(x) = \sqrt[7]{(g(x))^5}$ non $g(x) = \frac{1}{e} + e^{x^2}$

$f(x) = g(x)^{\frac{5}{7}}$ beraz $f'(x) = \frac{5}{7} g(x)^{\frac{5}{7}-1} g'(x) = \frac{5}{7} g(x)^{\frac{-2}{7}} g'(x)$

Eta $g(x) = \frac{1}{e} + e^{h(x)}$ non $h(x) = x^2$

Beraz $g'(x) = e^{h(x)} h'(x)$ eta $h'(x) = 2x$

Guztira hurrengo adierazpena lortuko da f(x) funtzioaren deribatuarentzako:

$$f'(x) = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{e} + e^{x^2}\right)^{\frac{-2}{7}} e^{x^2} 2x$$

6. ARIKETA:

Kalkula ezazu hurrengo integrala:

$$\int \cos^5 x\, dx$$

Ebazpena:

Berretzailea zenbaki bakoiti bat denez, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ berdintza aplikatu behar da:

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x \cos^4 x\, dx = \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)^2 dx =$$

$$\int \cos x\,(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) dx =$$

$$\int \cos x\, dx - 2\int \cos x \sin^2 x\, dx + \int \cos x \sin^4 x\, dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$