A-V BLOKEA: Espazio afin metrikoa

1. ARIKETA:

Izan bitez $r\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ zuzena eta $P(1,1,1)$ puntua.

a) r zuzena barnean duen eta P puntutik igarotzen den π planoaren ekuazioa lortu.

b) Kalkulatu π planoaren eta $s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \forall\lambda\in\mathbb{R}$ zuzenaren arteko distantzia.

c) Kalkulatu π planoaren eta $t:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases} \forall\lambda\in\mathbb{R}$ zuzenaren arteko distantzia.

Ebazpena:

a) Lehenengo eta behin $P(1,1,1)$ puntua $r\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ zuzenean dagoen aztertu behar da, horretarako puntua zuzenaren ekuazio jarraituan ordezkatuz.

$\dfrac{1+1}{-1}\neq\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{1-1}{2}$ betetzen denez, P puntua r zuzenean ez dagoela ondorioztatzen da.

Bestalde, π planoaren ekuazioa lortzeko lerrokatuta ez dauden hiru puntu edo bi bektore eta puntu bat behar dira. Zuzenaren ekuaziotik $P_r=(-1,0,1)$ puntua eta $\vec{v}=(-1,1,2)$ bektorea lor daitezke, planoa sortzeko bigarren bektorea $\vec{w}=\overrightarrow{PP_r}=(-2,-1,0)$ izanik.

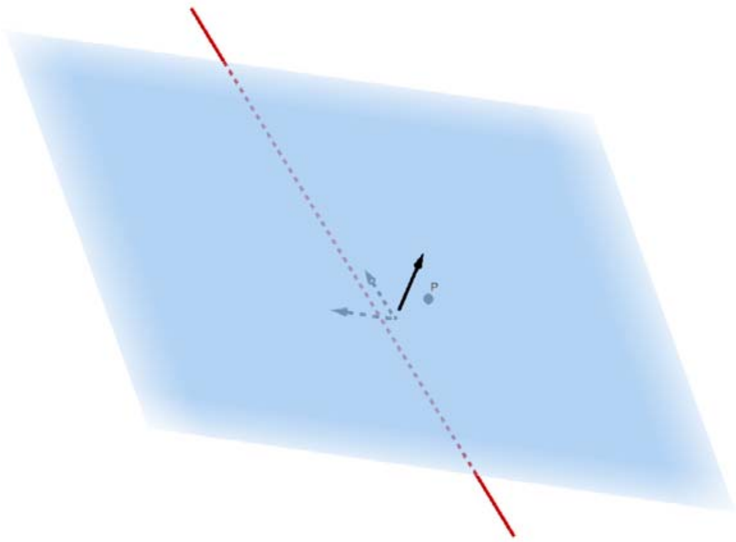
$\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreen arteko biderkadura bektoriala eginez planoaren bektore normala lortzen da:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

$\vec{n}_\pi = (2,-4,3)$ bektore normala duen planoaren ekuazioa $\pi\colon 2x-4y+3z+D=0$ da.

Bukatzeko P puntua planoan dagoenez $2-4+3+D=0 \Rightarrow D=1$

Hortaz, r zuzena eta P puntua barnean dituen planoaren ekuazioa $\pi\colon 2x-4y+3z+1=0$ da.

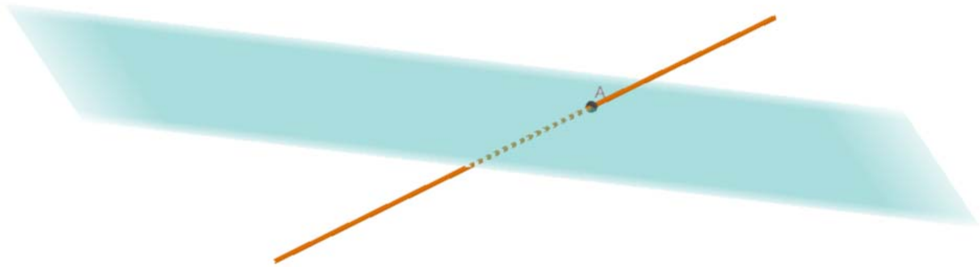


1. *Irudia. Eskatutako planoaren adierazpen grafikoa.*

b) $s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \forall\lambda\in\mathbb{R}$ zuzenaren norabide bektorea $\vec{v}_s=(1,2,3)$ planoaren bektore normalarekiko ortogonala den aztertuko da:

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 1\cdot 2 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_s \not\perp \vec{n}_\pi$$

$\vec{v}_s$ eta $\vec{n}_\pi$ bektoreak elkarrekiko ortogonalak ez direnez, zuzena ez da planoan eta zuzena eta planoa ez dira paraleloak, ondorioz, zuzena eta planoa elkar ebakitzen dute eta beraien arteko distantzia nulua da.



2. *Irudia. Planoaren eta zuzenaren arteko posizio erlatiboaren adierazpen grafikoa.*

c) $t:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \\ z=1-4\lambda \end{cases}$ zuzenaren norabide bektorea $\vec{v}_t=(2,-2,-4)$ da, norabide bektore hori eta planoaren bektore normala ortogonalak diren aztertuko da:

$$\vec{v}_t\cdot\vec{n}_\pi=2\cdot 2+(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot 3=0\Rightarrow \vec{v}_t\perp\vec{n}_\pi$$

Bi bektoreak ortogonalak direnez, zuzena planoaren barnean dago edo zuzena eta planoa elkarrekiko paraleloak dira.

Zuzena planoaren barnean dagoen edo ez zehazteko, zuzeneko $R(0,0,1)$ puntuak planoaren ekuazioa betetzen duen aztertu behar da, $3+1\neq 0$ betetzen denez, zuzena eta planoa elkarrekiko paraleloak dira.

Bien arteko distantzia kalkulatzeko zuzenean dagoen edozein punturen eta planoaren arteko distantzia kalkulatu behar da. Ebazpen honetan, $R(0,0,1)$ puntuaren eta planoaren arteko distantzia kalkulatuko da, horretarako R puntutik igarotzen den eta planoarekiko ortogonala den zuzenaren eta planoaren arteko Q ebaki-puntua kalkulatu eta $\overrightarrow{RQ}$ bektorearen norma lortuko da.

Q puntutik igarotzen den eta planoarekiko ortogonala den t′ zuzenaren ekuazio jarraitua $t': \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{3}$ da.

Ekuazio inplizituak $t': \begin{cases} 4x+2y=0 \\ 3x-2z+2=0 \end{cases}$ izanik.

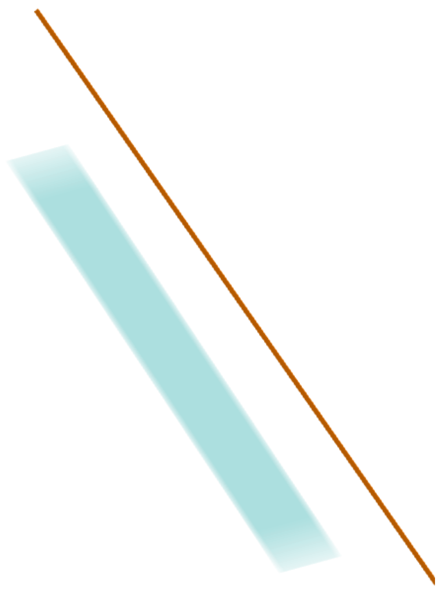
Zuzenaren eta planoaren arteko ebaki-puntua lortzeko $\begin{cases} 2x-4y+3z+1=0 \\ 4x+2y=0 \\ 3x-2z+2=0 \end{cases}$ sistema Gauss erabiliz ebatziko da:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_1 \leftarrow e_1/2 \\ e_2 \leftarrow e_2/2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_2 \leftarrow e_2 - 2e_1 \\ e_3 \leftarrow e_3 - 3e_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -13/2 & -1/2 \end{pmatrix} \overset{e_3 \leftarrow e_3 - \frac{6}{5}e_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -29/10 & -17/10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+\frac{3}{2}z=\frac{-1}{2} \\ 5y-3z=1 \\ \frac{-29}{10}z=\frac{-17}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-8}{29} \\ y=\frac{16}{29} \\ z=\frac{17}{29} \end{cases}$$

t' zuzenaren eta π planoaren arteko ebaki-puntua $Q=\left(\frac{-8}{29},\frac{16}{29},\frac{17}{29}\right)$ da, ondorioz, zuzenaren eta planoaren arteko distantzia

$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \left\|\left(\frac{-8}{29},\frac{16}{29},\frac{12}{29}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{-8}{29}\right)^2+\left(\frac{16}{29}\right)^2+\left(\frac{12}{29}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{29}}$ unitatekoa da.



3. *Irudia. Planoaren eta zuzenaren arteko posizio erlatiboaren adierazpen grafikoa.*

2. ARIKETA:

Izan bedi $\pi_1\!: 2x - y + 2z = 5$ planoa.

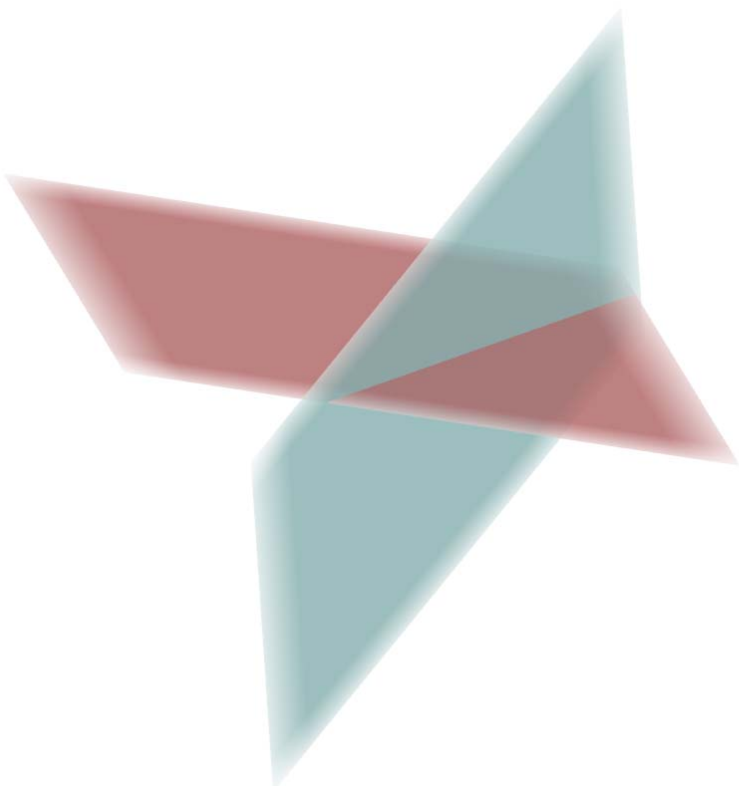
a) Kalkulatu π_1 eta $\pi_2\!: x + y - z = -2$ planoen arteko distantzia.

b) Kalkulatu π_1 eta $\pi_3\!: -2x + y - 2z = 0$ planoen arteko distantzia.

Ebazpena:

a) Planoak paraleloak diren edo elkar ebakitzen duten aztertuko dugu, horretarako bektore normalak paraleloak diren aztertu behar da.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_{\pi_1} = (2,-1,2) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (1,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$$ π_1 eta π_2 planoak elkar ebakitzen dute, ondorioz, planoen arteko distantzia nulua da.



4. Irudia. Bi planoen arteko posizio erlatiboaren adierazpen grafikoa.

b) Planoen bektore normalak paraleloak dira $\left.\begin{array}{l}\vec{n}_{\pi_1}=(2,-1,2)\\ \vec{n}_{\pi_3}=(-2,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}$ betetzen baita. Ondorioz, π_1 eta π_3 planoak elkarrekiko paraleloak dira. Hortaz, planoen arteko distantzia kalkulatzeko π_3 planoko edozein punturen eta π_1 planoaren arteko distantzia kalkulatuko da.

Ebazpen honetan π_3 planoan dagoen $P(0,0,0)$ puntuaren eta π_1 planoaren arteko distantzia lortuko da, horretarako P puntutik pasatzen den eta $\vec{n}_{\pi_1}$ norabide bektorea duen r zuzena kalkulatuz. r zuzenaren ekuazio jarraitua $r:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ da, ekuazio inplizituak $r:\left\{\begin{array}{l}x-z=0\\ x+2y=0\end{array}\right.$ izanik.

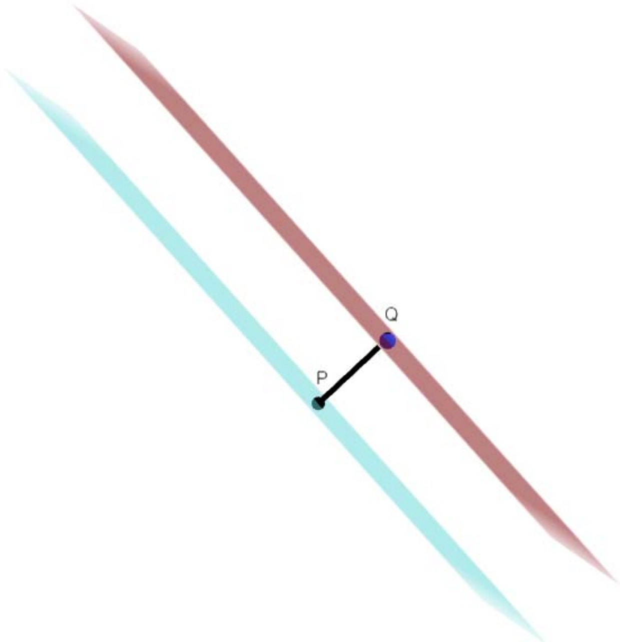
r zuzenaren eta π_1 planoaren arteko ebaki-puntua lortzeko $\left\{\begin{array}{r}x-z=0\\ x+2y=0\\ 2x-y+2z=5\end{array}\right.$ sistema Gauss erabiliz ebatziko da:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&2&0&0\\2&-1&2&5\end{pmatrix}\underset{e_3\leftarrow e_3-2e_1}{\overset{e_2\leftarrow e_2-e_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&2&1&0\\0&-1&4&5\end{pmatrix}\overset{e_2\leftrightarrow e_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&4&5\\0&2&1&0\end{pmatrix}\overset{e_3\leftarrow e_3+2e_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&4&-5\\0&0&9&10\end{pmatrix}$$

Hortaz, ebatzi beharreko sistema $\left\{\begin{array}{r}x-z=0\\ -y+4z=5\\ 9z=10\end{array}\right.$ da soluzioa $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{10}{9}\\ y=\frac{-5}{9}\\ z=\frac{10}{9}\end{array}\right.$ izanik.

r zuzenaren eta π_1 planoaren arteko ebaki-puntua $Q=\left(\frac{10}{9},\frac{-5}{9},\frac{10}{9}\right)$ da, ondorioz, π_1 eta π_2 planoen arteko distantzia $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\left\|\left(\frac{10}{9},\frac{-5}{9},\frac{10}{9}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2+\left(\frac{-5}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2}=\frac{5}{3}$ unitatekoa da.

Distantzia kalkulatzeko erabilitako prozesua ondorengo grafikoan ikus daiteke:



5. Irudia. Bi planoen arteko posizio erlatiboaren adierazpen grafikoa.

3. ARIKETA:

Izan bitez $P(1,-2,-1)$ puntua, π: $2x-2z=0$ planoa eta $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ zuzena.

a) Kalkulatu P puntuak π planoarekiko duen puntu simetrikoa.

b) Kalkulatu P puntuak r zuzenarekiko duen puntu simetrikoa.

Ebazpena:

a) $P(1,-2,-1)$ puntuak π planoaren ekuazioa betetzen ez duenez, $2+2\neq 0$ denez, P puntua π planoan ez dagoela ondoriozta daiteke, eta P puntuak π planoarekiko duen puntu simetrikoa kalkula daiteke. Horretarako, lehenengo eta behin, P puntuak π planoan duen proiekzio ortogonala kalkulatu behar da, hau da, P puntutik igaro eta π planoarekiko ortogonala den t zuzenaren eta π planoaren arteko ebaki puntua kalkulatu behar da.

t zuzena P puntutik igaro eta π planoarekiko ortogonala izan behar denez, bere ekuazio parametrikoak ondokoak dira:

$$t:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2 \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$$

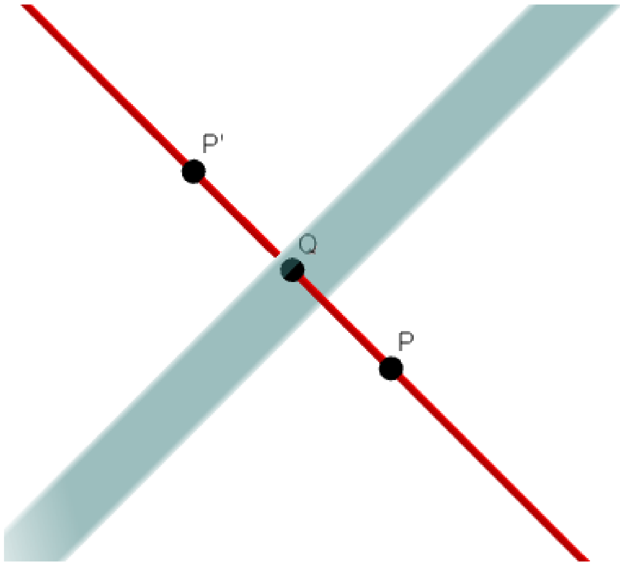
Hortaz, t zuzenaren eta π planoaren arteko ebakidura $2(1+2\lambda)-2(-1-2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{2} \Rightarrow Q=(0,-2,0)$ da.

P' puntua P puntuaren simetrikoa izateko Q PP' zuzenkiko erdiko puntua izan behar dela, hau da, $\frac{P+P'}{2}=Q$ bete behar da, ondorioz:

$$\frac{(1,-2,-1)+(x,y,z)}{2}=(0,-2,0)\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

Hortaz, P puntuak π planoarekiko duen puntu simetrikoa $P'(-1,-2,1)$ da.

P puntuak π planoarekiko duen puntu simetrikoa hurrengo irudian ikus daiteke:



6. Irudia. Puntuak planoarekiko duen puntu simetrikoaren adierazpen grafikoa.

b) $P(1,-2,-1)$ puntuak r zuzenaren bigarren ekuazio inplizitua betetzen ez duenez, $1-2(-1)\neq 0$ denez, P puntua zuzenean ez dagoela ondoriozta daiteke, eta P puntuak r zuzenarekiko duen puntu simetrikoa kalkula daiteke. Puntu simetriko hori kalkulatzeko P puntuak r zuzenean duen proiekzio ortogonala kalkulatu behar da, hau da, P puntutik igaro eta r zuzenarekiko ortogonala den π_1 planoaren eta r zuzenaren arteko ebaki puntua kalkulatu behar da.

π_1 planoa r zuzenarekiko ortogonala izan behar denez, bere ekuazio inplizitua $\pi_1: 2x-y+z+D=0$ da, bestalde, P puntua planoan egon behar denez, $2+2-1+D=0 \Rightarrow D=-3$. Ondorioz $\pi_1: 2x-y+z-3=0$.

$\pi_1: 2x-y+z-3=0$ planoaren eta r zuzenaren arteko ebaki-puntua kalkulatzeko $\left\{\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ x-2z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{array}\right.$ sistema Gauss erabiliz ebatziko da.

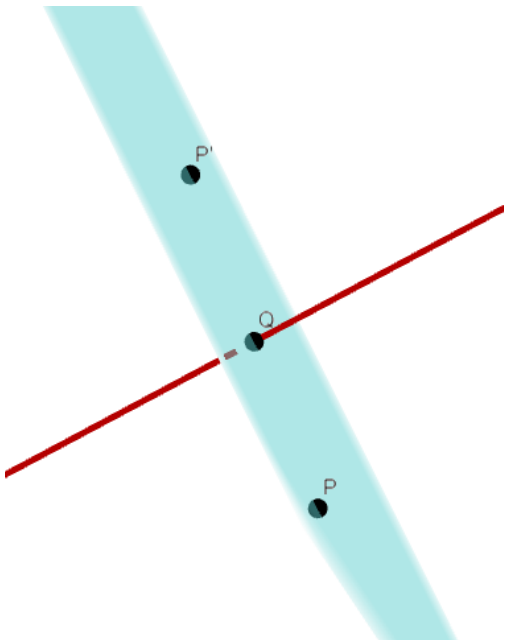
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{e_3 \leftarrow e_3 - 2e_1}{\overset{e_2 \leftarrow e_2 - e_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{e_3 \leftarrow e_3 - 3e_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 6z = 3 \end{cases}$$

sistema baliokidea ebatzi behar da, soluzioa $\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ izanik.

Q PP' zuzenkiko erdiko puntua izan behar denez, hau da, $\dfrac{P + P'}{2} = Q$ bete behar denez:

$$\frac{(1,-2,-1) + (x,y,z)}{2} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ondorioz, P puntuak r zuzenarekiko duen puntu simetrikoa $P'(1,1,2)$ da.



7. *Irudia. Puntuak zuzenarekiko duen puntu simetrikoaren adierazpen grafikoa*

4. ARIKETA:

Kalkulatu ondoko zuzenen arteko distantzia:

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = z$ eta $s \equiv \begin{cases} x = -1+4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = z$ eta $t \equiv x = y = z$

Ebazpena:

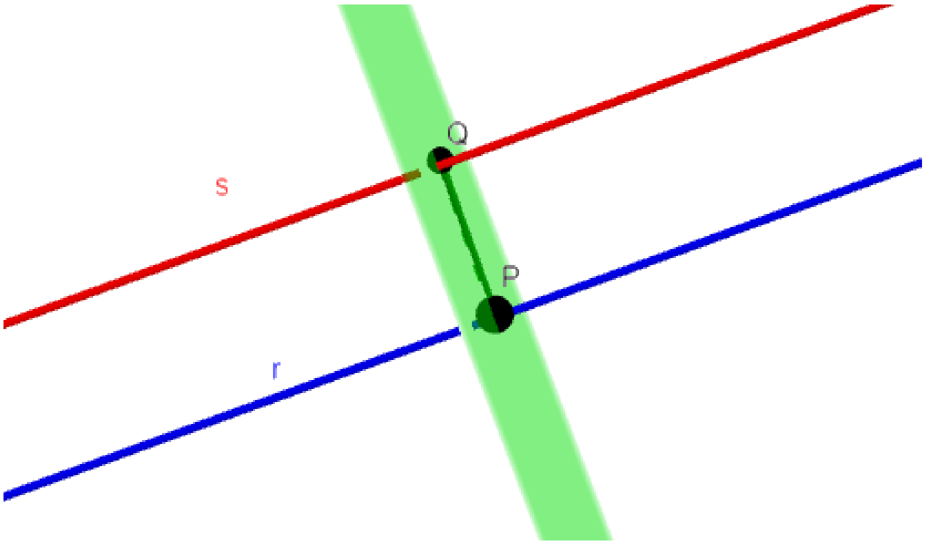
a) r eta s zuzenen posizio erlatiboa kalkulatuko da.

r-ren eta s-ren norabide bektoreak $\vec{u} = (2,2,1)$ eta $\vec{v} = (4,4,2)$ dira, hurrenez hurren.

Bektoreak proportzionalak direnez ($\vec{v} = 2\vec{u}$) eta $P = (1,2,0) \in r$ eta $P \notin s$, bi zuzen horiek paraleloak dira.

Bi zuzenen arteko distantzia kalkulatzeko, P puntutik igarotzen den eta s zuzenarekiko perpendikularra den π planoaren ekuazioa definitzen da.

$$\pi \equiv \begin{cases} P \in r \Rightarrow P = (1,2,0) \\ r \perp \pi \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_\pi \end{cases}$$



8. Irudia. Bi zuzenen arteko posizio erlatiboaren adierazpen grafikoa

π planoaren ekuazioa:

$$2x+2y+z+D=0$$

$P\in r\Rightarrow 2+4+D=0\Rightarrow D=-6$

Orduan, $\pi\equiv 2x+2y+z-6=0$

s-ren eta π-ren arteko ebakidura (Q puntua) kalkulatzen da

$$Q\equiv\begin{cases}\pi\equiv 2x+2y+z-6=0\\ s\equiv\begin{cases}x=-1+4\lambda\\ y=4\lambda & \forall\lambda\in\mathbb{R}\\ z=1+2\lambda\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&2(-1+4\lambda)+2(4\lambda)+(1+2\lambda)-6=0\\ &-2+8\lambda+8\lambda+1+2\lambda-6=0\\ &18\lambda=7\Rightarrow\lambda=\frac{7}{18}\end{aligned}$$

Beraz, Q puntuaren koordenatuak honako hauek dira:

$$\begin{aligned}x&=-1+\frac{28}{18}=\frac{5}{9}\\ y&=4\frac{7}{18}=\frac{14}{9}\\ z&=1+\frac{14}{18}=\frac{16}{9}\end{aligned}$$

Orduan, bi zuzenen arteko distantzia:

$d(r,s)=d(P,Q)=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ Q unitatekoa da.

b) r eta t zuzenen posizio erlatiboa kalkulatuko da.

r-ren eta t-ren norabide bektoreak $\vec{u}=(2,2,1)$ eta $\vec{w}=(1,1,1)$ dira, hurrenez hurren.

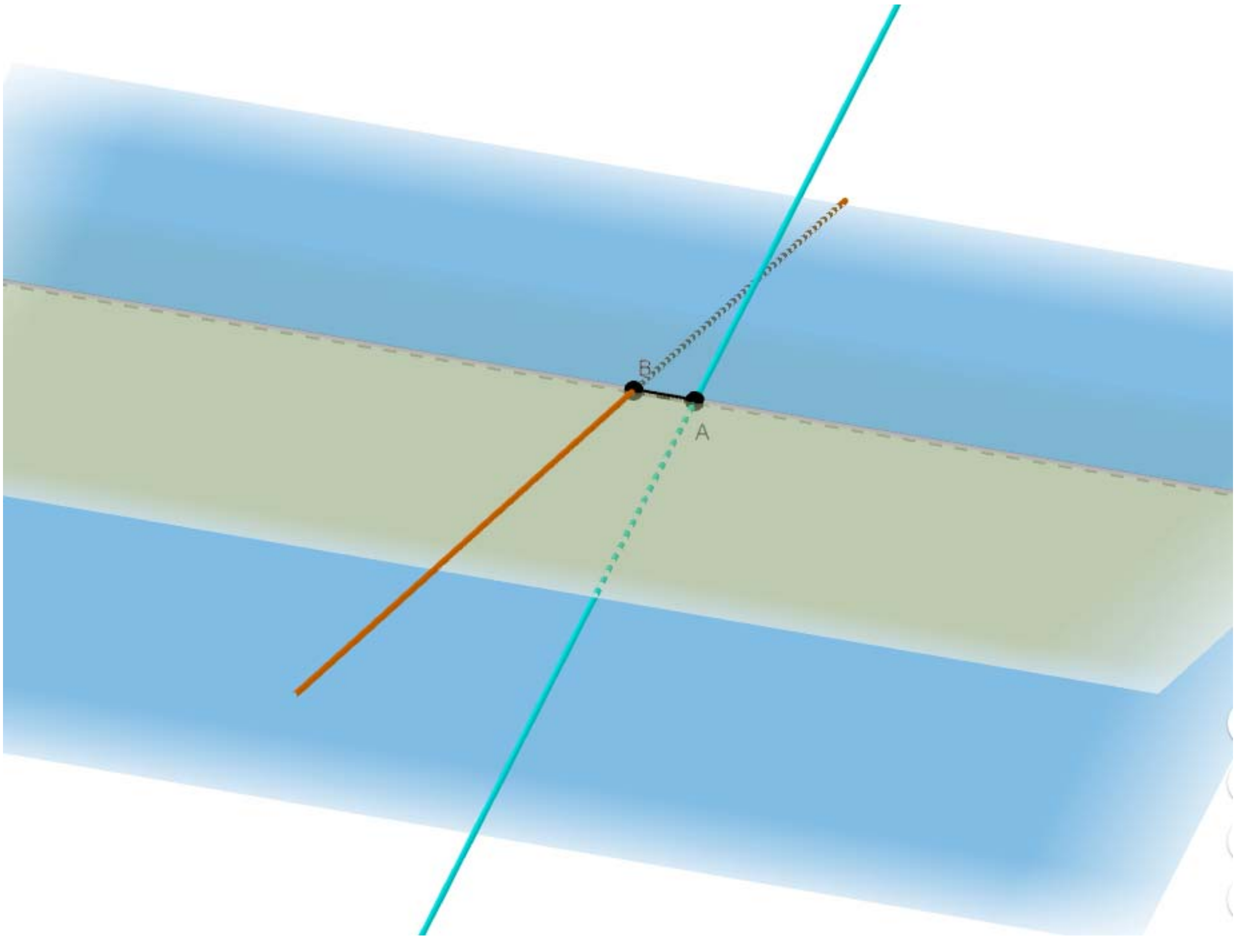
Bektoreak proportzionalak ez direnez, zuzenek elkar gurutzatzen dute edo elkar ebakitzen dute. Horretarako, r zuzeneko $P=(1,2,0)$ puntua eta t zuzeneko $F=(0,0,0)$ puntua kontsideratzen dira. $\overrightarrow{PF}=(-1,-2,0)$ bektorea, $\vec{u}$ eta $\vec{w}$ bektoreekin planokidea bada, zuzenek elkar ebakitzen dute. Baina aurreko bektoreak planokideak ez badira, zuzenek elkar gurutzatzen dute. Honako hau frogatzeko hiru bektoreek osatzen duten matrizearen heina kalkulatu behar da.

$$h\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 + 4 \neq 0$$

Ondorioz, zuzenek elkar gurutzatzen dute. Haien arteko distantzia kalkulatzeko, $A \in r$ eta $B \in t$ puntuak zehaztu behar dira, non A eta B puntuetatik igarotzen den zuzena perpendikularra da emandako zuzenekin.



9. Irudia. Bi zuzenen arteko posizio erlatiboaren adierazpen grafikoa

$$A \in r \Rightarrow A = (1+2\lambda, 2+2\lambda, \lambda)$$
$$B \in t \Rightarrow B = (\mu, \mu, \mu)$$
$$\overrightarrow{AB} = (\mu - 1 - 2\lambda, \mu - 2 - 2\lambda, \mu - \lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Rightarrow 2(\mu - 1 - 2\lambda) + 2(\mu - 2 - 2\lambda) + (\mu - \lambda) = 0$$
$$2\mu - 2 - 4\lambda + 2\mu - 4 - 4\lambda + \mu - \lambda = 0$$
$$5\mu - 9\lambda - 6 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{w} \Rightarrow (\mu - 1 - 2\lambda) + (\mu - 2 - 2\lambda) + (\mu - \lambda) = 0$$
$$3\mu - 5\lambda - 3 = 0$$

Orduan $\begin{cases} 5\mu - 9\lambda - 6 = 0 \\ 3\mu - 5\lambda - 3 = 0 \end{cases}$ sistema hau ebatzi behar da.

$$\begin{cases} 5\mu - 9\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 15\mu - 27\lambda - 18 = 0 \\ 3\mu - 5\lambda - 3 = 0 \Rightarrow -15\mu + 25\lambda + 15 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow -2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3}{2}$$
$$\Rightarrow 3\mu + \frac{15}{2} = 3 \Rightarrow \mu = \frac{-3}{2}$$

Beraz, $d(r,t) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ eta $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ unitatekoa da.