

## A-III BLOKEA: Ruffini-ren teknika. Polinomioen erroen kalkulua

### Polinomio baten erroaren definizioa

$r$   $p(x)$  polinomioaren erroa da baldin eta soilik baldin  $p(r)=0$  bada

### $n$ graduko polinomio baten faktORIZAZIOA

Izan bedi  $n$  ordenako  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  polinomioa, orduan,  $p(x)$  polinomioa  $p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$  bezala faktoriza daiteke,  $r_1, r_2, \dots, r_n$  polinomioaren erroak izanik.

### Polinomio baten erroen kalkulua

Izan bedi  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  non  $a_0, a_n \neq 0$

#### 1) Erro osoak

$p(x)$  polinomioak izan ditzakeen erro osoak  $a_0$  koefizientearen zatitzaileak dira.

#### 2) Erro arrazionalak

Izan bedi  $p$   $a_0$  koefizientearen zatitzailea

Izan bedi  $q$   $a_n$  koefizientearen zatitzailea

$p(x)$  polinomioak izan ditzakeen erro arrazionalak  $p/q$  motakoak dira.

### **OHARRA:**

Polinomio baten erroak errealak (osoak, arrazionalak, irrazionalak) eta konplexuak izan daitezke, baina Ruffini-ren teknika erabiltzeko erro oso eta arrazionalak dira hautagai erosoak. Horrela, erro oso eta arrazional posibleak eta Ruffini-ren teknika erabiliko dugu polinomioaren gradua jaisteko.

**ADIBIDEA:**

Kalkulatu honako polinomioen erroak:

- a)  $p_1(x) = x^3 - 7x + 6$
- b)  $p_2(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$
- c)  $p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$
- d)  $p_3(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 10$

Ebazpena:

a)  $p_1(x) = x^3 - 7x + 6$

$p_1(x)$ -en erro oso eta arrazional posibleak  $\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$  dira.

Ruffini aplikatuz:

1	1	0	-7	6
1	1	1	-6	
	1	1	-6	0

$r=1$  polinomioaren erroa da. Beraz,  $p_1(x) = x^3 - 7x + 6$  polinomioa  $p_1(x) = (x-1) \cdot (x^2 + x - 6)$  bezala berridatz daiteke. Gelditzen diren bi erroak lortzeko bigarren mailako ekuazioa ( $x^2 + x - 6 = 0$ ) ebatzi edo berriro Ruffini aplikatu daiteke.

1	1	0	-7	6
1	1	1	-6	
	1	1	-6	0
2	1	2	6	
	1	3	0	
-3	1	-3		
	1	0		

$p_1(x)$  polinomioaren erroak 1,2 eta -3 dira.

Konprobaketa:

$$p_1(1) = 1 - 7 + 6 = 0$$

$$p_1(2) = 8 - 14 + 6 = 0$$

$$p_1(-3) = -27 + 21 + 6 = 0$$

Beraz,  $p_1(x) = x^3 - 7x + 6$  polinomioa honela faktoriza daiteke:

$$p_1(x) = x^3 - 7x + 6 = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

b)  $p_2(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$

Polinomioak ez dauka gai askerik, beraz, polinomioa  $p_2(x) = x \cdot (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$  bezala berridatz daiteke eta zeroa polinomioaren erroa izango da.

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$  polinomioa faktorizatzeko, badakigu bere erro oso eta arrazional posibleak:  $\pm 12, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$  direla.

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$  gaiari Ruffini aplikatuz:

3	1	-3	-4	12
		3	0	-12
	1	0	-4	0

Beraz,  $r=3$  polinomioaren erroa da, eta polinomioa honela berridatz daiteke:

$$p_2(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = x \cdot (x-3) \cdot (x^2 - 4).$$

Faktorizazioa bukatzeko, polinomioa honela faktoriza daiteke:

$$p_2(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = x \cdot (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$

c)  $p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

Erro oso eta arrazional posibleak:  $\pm 3, \pm 1, \pm 3/2, \pm 1/2$

Ruffini aplikatuz:

-3	2	3	-8	3
		-6	9	-3
	2	-3	1	0

$r_1 = -3$  polinomioaren erroa da. Beste erroak kalkulatzeko lortutako bigarren mailako ekuazioa ( $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ) ebatziko dugu:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Beraz, beste bi erroak:  $r_2 = 1$  eta  $r_3 = 1/2$  dira:

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 2 \cdot (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x-1/2)$$

d)  $p_3(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 10$

Erro oso eta arrazional posibleak:  $\pm 10, \pm 5, \pm 2, \pm 1$

Ruffini aplikatuz:

	1	5	-2	-10
-5		-5	0	10
	1	0	-2	0

$r_1 = -5$  polinomioaren erroa da. Beste erroak kalkulatzeko, lortutako bigarren mailako ekuazioa ( $x^2 - 2 = 0$ ) ebatziko dugu:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Beraz, beste bi erroak:  $r_2 = +\sqrt{2}$  eta  $r_3 = -\sqrt{2}$  dira.

Ariketa honetan argi ikusten da polinomio baten erroak irrazionalak ere izan daitezkeela, baina Ruffini-ren teknika erro hauekin aplikatzeak kalkuluak zaildu egiten dituen bezala, beti erro oso eta arrazionalak probatuz haztea komeni da.

Polinomio honen faktORIZAZIOA honakoa da:

$$p_3(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 10 = (x + 5) \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$$