AUTOEBALUAZIOA EBATZITA

1. Zorizko aldagaiak honako balioak har ditzake: {2,3,7,8,10}. p(2)=p(3)=p(7)=1/4 eta p(8)=p(10)=1/8 dela jakinik, kalkulatu asimetria eta kurtosi balioak, eta esan zein den banaketaren forma.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sigma^3} E(X - E(X))^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} = 5,25$$

$$\mu_3 = E(X - E(X))^3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^3 p(x_i) =$$

$$\mu_3 = (2-5,25)^3 \cdot \frac{1}{4} + (3-5,25)^3 \cdot \frac{1}{4} + (7-5,25)^3 \cdot \frac{1}{4} + (8-5,25)^3 \cdot \frac{1}{8} + (10-5,25)^3 \cdot \frac{1}{8} = 5,90625$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) =$$

$$\sigma^2 = (2-5,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3-5,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (7-5,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (8-5,25)^2 \cdot \frac{1}{8} + (10-5,25)^2 \cdot \frac{1}{8} = 8,4375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8,4375}$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{5,90625}{\left(\sqrt{8,4375}\right)^3} = \boxed{0,24099}$$

0-tik oso gertu dago balioa, beraz simetrikoa dela esan daiteke nahiz eta pixka bat asimetriko positiboa izan.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\mu_4 = E(X - E(X))^4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^4 p(x_i) =$$

$$\mu_4 = (2-5,25)^4 \cdot \frac{1}{4} + (3-5,25)^4 \cdot \frac{1}{4} + (7-5,25)^4 \cdot \frac{1}{4} + (8-5,25)^4 \cdot \frac{1}{8} + (10-5,25)^4 \cdot \frac{1}{8} = 107,4258$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) =$$

$$\sigma^2 = (2-5,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3-5,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (7-5,25)^2 \cdot \frac{1}{4} + (8-5,25)^2 \cdot \frac{1}{8} + (10-5,25)^2 \cdot \frac{1}{8} = 8,4375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8,4375}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{107,4258}{\left(\sqrt{8,4375}\right)^4} - 3 = \boxed{-1,4910}$$

Balioa negatiboa da beraz gure banaketa pixka bat platikurtikoa dela esan daiteke.

2. Izan bedi ondorengo dentsitate funtzioa duen radio-isotopo baten bizi itxaropena bezala definituriko zorizko aldagaia:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Kalkulatu k-ren balioa $f(x)$ dentsitate-funtzioa izan dadin.
b) Lor bedi zorizko aldagai jarraituaren banaketa-funtzioa.
c) Aurkitu banaketaren funtzio karakteristikoa.
d) Aurkitu banaketaren momentuen funtzio sortzailea.
e) Momentuen funtzio sortzailea erabiliz kalkulatu banaketaren batezbestekoa eta bariantza.

a) $f(x)$ dentsitate-funtzioa izan dadin bi baldintza hauek bete behar ditu:

$$1)\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Lehenengo baldintza betetzeko: $k \geq 0$

Bigarren baldintza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-2x}dx = \lim_{t\to+\infty} k\int_{0}^{t} e^{-2x}dx;$$

$$\lim_{t\to+\infty} k\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^t = k\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 1; \quad \boxed{k=2}$$

Beraz,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

b) Banaketa funtzioa:
$x \leq 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0\ dx$$

$x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2e^{-2t}dt = 0 + \left(-e^{-2t}\right)\Big|_0^x = -e^{-2x} + 1 = 1 - e^{-2x}$$

Beraz,

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

c)

$$\Psi(t)=E\left(e^{itx}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,\mathrm{f}(x)dx=\int_{-\infty}^{0}e^{itx}0dx+\int_{0}^{+\infty}e^{itx}\cdot 2e^{-2x}dx=2\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}e^{x(it-2)}dx=2\lim_{a\to+\infty}\left.\frac{e^{-x(2-it)}}{it-2}\right|_{0}^{a}=\boxed{\frac{2}{2-it}}$$

d)

$$\alpha(w)=E\left(e^{wx}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{wx}\,\mathrm{f}(x)dx=\int_{-\infty}^{0}e^{wx}0dx+\int_{0}^{+\infty}e^{wx}\cdot 2e^{-2x}dx=2\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}e^{x(w-2)}dx=2\lim_{a\to+\infty}\left.\frac{e^{-x(2-w)}}{w-2}\right|_{0}^{a}=\boxed{\frac{2}{2-w}}$$

e)

Batezbestekoa lehenengo ordenako momentua denez:

$$E(X)=\left.\frac{dE(e^{wx})}{dw}\right|_{w=0}=\left.\frac{2}{(2-w)^2}\right|_{w=0}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Bariantza batezbestekoan zentraturiko bigarren ordenako momentua da beraz:

$$\sigma^2=\alpha_2-\left(E(X)\right)^2=\left.\frac{d^2E(e^{wx})}{dw^2}\right|_{w=0}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{4}{(2-w)^3}\right|_{w=0}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boxed{\frac{1}{4}}$$

3. Suitzako kimikako laborategi batean lindanoari buruz entsegu ezberdinak egiten ari dira. Bakteria mota jakin batek lindaroaren aurrean duen erresistentzia neurtu nahi dute. Jakina da, bakteria hauen %0.5-ak ez dutela lindanoaren aurrean inolako erresistentziarik. Ingurune jakin batean 3.000 bakteriako lagina badago, ondorengoa kalkulatu:

   a) Lindanoaren aurrean inolako erresistentziarik ez daukaten bakteria kopurua 8 baino handiagoa eta 20 baino txikiagoa izateko probabilitatea.
   b) Zehazki antibiotikoen aurrean inolako erresistentziarik ez daukaten 10 bakteria egoteko probabilitatea.

a) Lehenik eta behin zorizko aldagaia definitu eta honek jarraitzen duen banaketa ipini behar da.

X : 'Lindanoaren aurrean erresistentziarik ez duten bakteria kopurua'

$X \sim B(n = 3.000, p = 0,005)$

Kasu honetan $n = 3.000 > 30$ izanik eta $p = 0,005 < 0,1$ banaketa binomiala, Poisson-en banaketa batera hurbil daiteke.

X : 'Lindanoaren aurrean erresistentziarik ez duten bakteria kopurua'

$X \sim B(n = 3.000, p = 0,005) \cong P(n \cdot p = 15)$

Beraz,

$$P(2 < X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(2 < X < 8) = \left[e^{-15} \left(\frac{15^3}{3!} + \frac{15^4}{4!} + \frac{15^5}{5!} + \frac{15^6}{6!} + \frac{15^7}{7!} \right) \right] = \boxed{0,0180}$$

b) Zehazki antibiotikoen aurrean inolako erresistentziarik ez daukaten 10 bakteria egoteko probabilitatea.

$$P(X = 10) = \frac{e^{-15} \cdot 15^{10}}{10!} = \boxed{0,0486}$$

4. Langile bila dabilen enpresa bat hautagaien aukeraketa egiten ari da. Giza-baliabideen teknikoak azterketa bat egiten die hautagaiei. Hauek azterketan lortutako puntuaketaren batez-bestekoa 60 da, eta desbideratze tipikoa 10.

   Hautagaiek aukeraketaren hurrengo fasera pasatzeko 55 eta 80 puntu bitarteko nota lortzea nahitaezkoa da. Hautagaiek lortutako puntuaketak banaketa normal bati jarraitzen diola jakinik,

   a) Hautagaien zein portzentaje pasako da hautaketaren hurrengo fasera?
   b) Hautagaien zein portzentajek lortu ditu 90 puntu baina gehiago?
   d) Hautagaien zein portzentajek lortu ditu 50 puntu baina gutxiago?
   e) Zeintzuk dira finkatu behar ditugun puntuaketen bi balio zentralak beraien artean hautagaien %50a egon dadin?

X : 'Hautagaiak lortutako puntuak.'

$55 \le X \le 80 \rightarrow$ Hautagaia hurrengo fasera pasako da

$E(X) = 60$ eta $\sigma = 10$ $\quad X \sim N(60;10)$

a)

$P(55 \le X \le 80) = P(X \le 80) - P(X \le 55)$

$$Z = \frac{x-60}{10}$$

$$P(55 \le X \le 80) = P(Z \le \frac{80-60}{10}) - P(Z \le \frac{55-60}{10}) = P(Z \le 2) - P(Z \le -0,5)$$

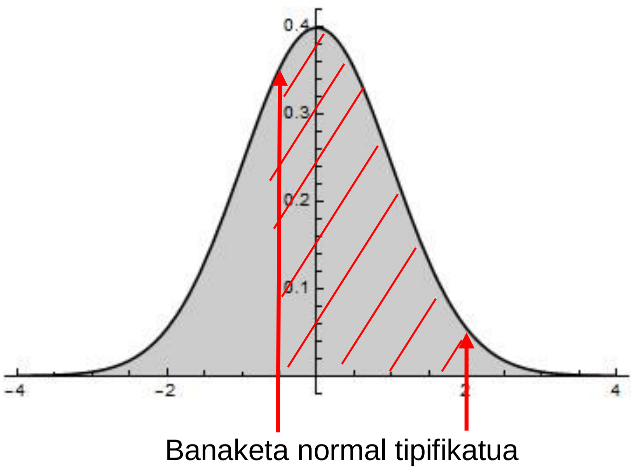
$P(Z \le 2) = 0,9772$ Balio hau banaketa normal tipifikatuaren taulan begiratu dugu

$P(Z \le -0,5)$ Gure taulan ez daukagu balio negatiborik, beraz simetria aplikatu behar dugu

$P(Z \le -0,5) = P(Z \ge 0,5) = 1 - P(Z \le 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

$$P(55 \le X \le 80) = P(Z \le 2) - P(Z \le -0,5) = 0,9772 - 0,3085 = \boxed{0,6687}$$

Beraz hautagaien % 66,87a pasako da hurrengo fasera.



Eskatzen diguten probabilitatea azalera gorria da.

b)

$$P(X > 90) = 1 - P(X \leq 90) = 1 - P(Z \leq \frac{90-60}{10}) = 1 - P(Z \leq 3)$$

$P(Z \leq 3) = 0,9987$ Banaketa normal tipifikatuaren taulan begiratu dugu

$P(X > 90) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$

Beraz % 0,13ak lortu ditu 90 puntu baina gehiago

d)

$$P(X < 50) = P(Z < \frac{50-60}{10}) = P(Z < -1) = P(Z \leq -1)$$

$P(Z \leq -1)$ Gure taulan ez dago balio negatiborik beraz simetria aplikatu behar dugu.

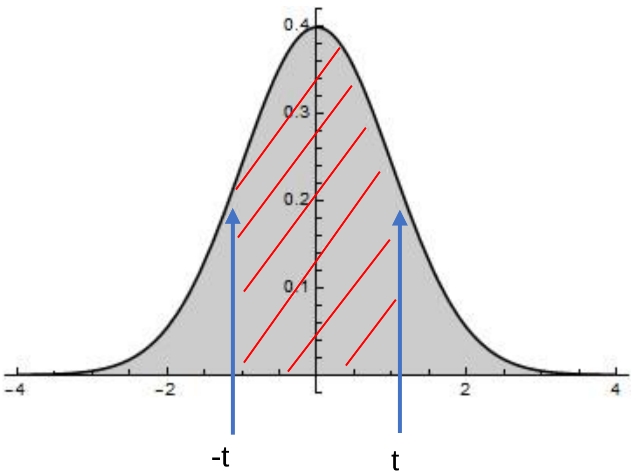
$P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$

$P(Z \leq 1) = 0,8413$ Balio hau banaketa normal tipifikatuaren taulan bilatu dugu.

$P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$

Beraz % 15,87ak lortu ditu 50 puntu baina gutxiago

e)



Banaketa normal tipifikatua

Atal honetan, *b* eta *a* edo μ-d eta μ+d balio zentralak kalkulatzeko eskatzen da (aldagai aldaketa egin eta gero banaketa normal tipifikatua erabiltzeko -t eta t, bakoitza, banaketaren batezbestekoaren distantzia berdinera dago. Ematen diguten datua da haien arteko azalera gorria %50ekoa izan behar dela.

Banaketa normal tipifikatua erabiliko dugu:

$$P(b \le X \le a) = P(\mu - d \le X \le \mu + d) = P(X \le a) - P(X \le b) = P(X \le \mu + d) - P(X \le \mu - d) = 0,5$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Atal hau ebazteko simetria aplikatuko dugu behin eta berriz:

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(X \le \mu + d) - P(X \le \mu - d) = P(Z \le t) - P(Z \le -t) =$$

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(X \le \mu + d) - P(X \le \mu - d) = P(Z \le \frac{\mu + d - \mu}{\sigma}) - P(Z \le \frac{\mu - d - \mu}{\sigma}) =$$

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(Z \le \frac{d}{\sigma}) - P(Z \le \frac{-d}{\sigma}) = P(Z \le \frac{d}{10}) - P(Z \le \frac{-d}{10}) = P(Z \le \frac{d}{10}) - P(Z \ge \frac{d}{10})$$

$$P(b \le \mathrm{X} \le a) = P(Z \le \frac{d}{10}) - \left[1 - P(Z \le \frac{d}{10})\right] = -1 + 2P(Z \le \frac{d}{10}) = 0,5 \Rightarrow P(Z \le \frac{d}{10}) = 0,75$$

Banaketa normal tipifikatuaren taulan ikusten dugu $\frac{d}{10}$-ren zein baliotarako probabilitatea 0,75 den.

$$P(Z \le \frac{d}{10}) = 0,75 \Rightarrow \frac{d}{10} = 0,68 \Rightarrow d = 6,8$$

$b = \mu - d \Rightarrow b = 53,2$ eta

$a = \mu + d \Rightarrow a = 66,8$

Beraz b eta a puntu zentralak $53,2$ eta $66,8$ izango dira.

5. Sistema elektroniko konplexu batek bere muntaian osagai zehatz bat beharrezkoa du. Osagai hauek lote handietan erosten dira eta era sekuentzialean entseatzen dira lehenengo osagai akastuna aurkitu arte. Akastunak diren osagaien portzentajea %5-ekoa da. Kalkulatu R Studio erabiliz:

   a) Aurkitzen den lehenengo osagai akastuna entseatutako lehenengo 4 osagaietako bat izateko probabilitatea.
   b) Aurkitzen den lehenengo osagai akastuna gutxienez entseatutako lehenengo 4 eta gehienez 10 osagaien artean egoteko probabilitatea.

X : 'Entseatutako osagai kopurua lehenengo osagai akastuna aurkitu arte'

$X \sim G(p = 0,05)$

$a) P(X \leq 4)$

$>$ pgeom$(3, 0.05)$

[1] 0.1854938

$P(X \leq 4) = \boxed{0,1854938}$

$b) P(4 \leq X \leq 10)$

$>$ pgeom$(9, 0.05) -$ pgeom$(2, 0.05)$

[1] 0.2586381

$P(4 \leq X \leq 10) = \boxed{0,2586381}$