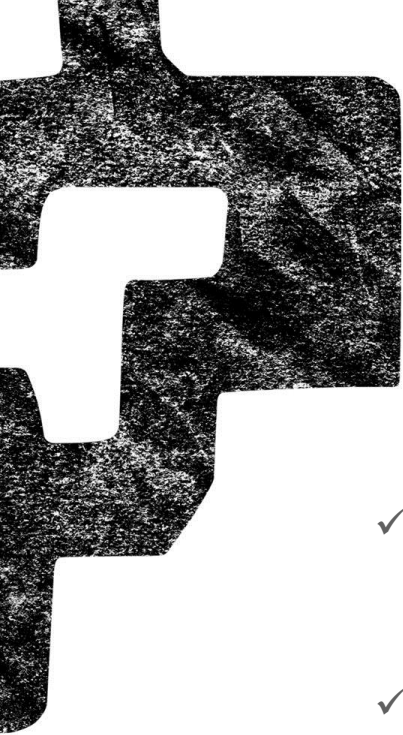


ZORIZKO ALDAGAI UNIDIMENTSIONALEN FUNTZIOAK

2. GAIA

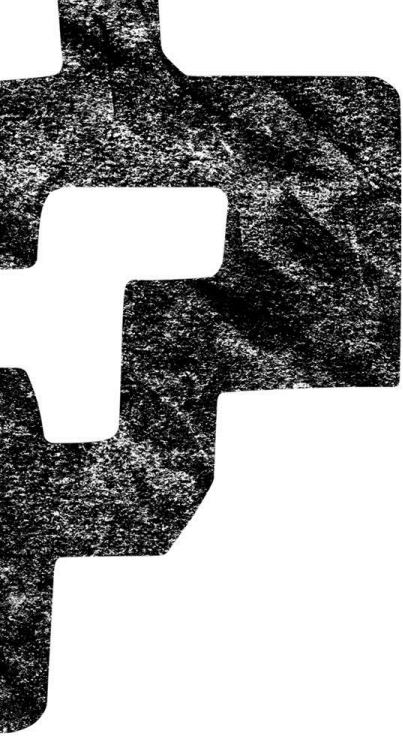
Xabier Erdocia
Itsaso Leceta





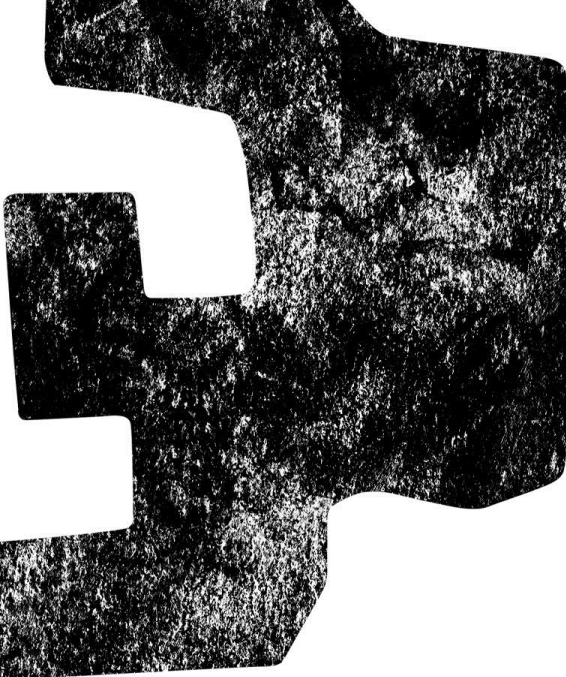
IKASKETA HELBURUAK

- ✓ Zorizko aldagai baten probabilitate, dentsitate eta banaketa funtzioak definitu, eta haien arteko desberdintasunak identifikatzen jakitea
- ✓ Zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoaren kontzeptua ulertzea eta honen bidez momentu ezberdinak kalkulatzeko gai izatea
- ✓ Zorizko aldagai baten funtzio sortzailearen kontzeptua ulertzea eta honen bidez momentu ezberdinak kalkulatzeko gai izatea



AURKIBIDEA

- 2.1. Probabilitate funtzioa
- 2.2. Dentsitate funtzioa
- 2.3. Banaketa funtzioa
- 2.4. Funtzio karakteristikoa
- 2.5. Funtzio sortailea



2.1. Probabilitate funtzioa

I. Definizioa

- Izan bedi X zorizko aldagai diskretua. Probabilitate (edo masa) funtzioa, $p(x)$, honela definitzen da:

$$p: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow p(x) = P(X = x)$$

- Modu honetan zorizko aldagai diskretu baten lagin espazioa (S) honela definitzen da:

$$S_x = \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$$

- Probabilitate funtzioak, $p(x)$, lagin espazioko, S_x , puntu bakoitzari bere probabilitatea esleitzen dio eta 0 izango da lagin espazioko kanpoko puntu ororentzat.



II. Propietateak

1. $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$

3. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, orduan $P(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$



2.2. Dentsitate funtzioa

I. Definizioa

- Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X aldagaiaren dentsitate funtzioa, $f(x)$, honela definitzen da:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \text{ izanik.}$$

- Modu honetan zorizko aldagai jarraitu baten lagin espazioa (S) honela definitzen da:

$$S_x = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$

- X zorizko aldagai jarraitu batek balio zehatz bat hartzeko probabilitatea 0 da, hau da, $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



II. Propietateak

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

3. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, orduan $P(A) = \int_A f(x) dx$



2.3. Banaketa funtzioa

I. Definizioa

- Izan bedi X zorizko aldagaia. Aldagai horren banaketa funtzioa, $F(x)$, honela definitzen da:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

- Banaketa funtzioaren definizioa berdina izan arren, honen kalkulua zorizko aldagaiaren izaeraren (diskretua edo jarraitua) menpe dago.
- Kasu diskretua:** $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

I. Definizioa

- Kasu diskretuetan, probabilitate funtzioa banaketa funtziotik honela lortu daiteke:

$$p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

- Kasu jarraitua:** $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Kasu jarraituetan, probabilitate funtzioa banaketa funtziotik honela lortu daiteke:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



II. Propietateak

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
3. Banaketa funtzioa ez-beherakorra da: $F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2$
4. Banaketa funtzioa eskubitik jarraitua da.



2.4. Funtzio karakteristikoa



I. Definizioa

- Izan bedi X zorizko aldagaia eta “ t ” parametro erreala. X zorizko aldagaiaren funtzio karakteristikoa $\Psi(t)$ ikurrarekin izendatzen da. Funtzio parametrikoko bat da eta definizioz ondorengo itxura dauka:

$$\Psi(t) = E\left(e^{itx}\right)$$

Non “ e ” Eulerren zenbakia eta “ i ” unitate irudikaria diren.

- Ondorioz, Euler-en formula erabiliz zenbaki konplexu horren adierazpen trigonometrikoa lortzen da:

$$e^{itx} = \cos(tx) + i \sin(tx)$$

I. Definizioa

- Zorizko aldagaia jarraitua bada, $f(x)$ bere dentsitate funtzioa izanik:

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x) dx$$

- Zorizko aldagaia diskretua bada, $p(x)$ bere probabilitate funtzioa izanik:

$$\Psi(t) = \sum_{j=1}^n e^{itx_j} \cdot p(x_j)$$

- Ikus daitekenez, funtzio karakteristikoa zorizko aldagai jarraituaren kasuan, dentsitate funtzioaren Fourier-en transformatua da.
- Modu berean, zorizko aldagai diskretuaren kasuan, funtzio karakteristikoa probabilitate funtzioaren Fourier-en seriezko garapenaren bidez lortu daiteke.



I. Definizioa

Bakartasun-teorema:

Izan bitez $F(x), G(x)$ banaketa funtzioak, $f(t), g(t)$ funtzio karakteristikoak dituztenak hurrenez hurren. Suposa dezagun $f(t) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Orduan, $F(x) = G(x)$ x balio ororako.

- Teorema honen ondorioz, zorizko aldagai baten funtzio karakteristikoak honen banaketa funtzioa unibokoki definitzen du. Hau da, banaketa funtzio bera jarraitzen duten aldagai guztiek funtzio karakteristiko bera dute eta alderantziz.

II. Propietateak

1. Parametroak balio nulua duenean, hau da, $t = 0$ denean, funtzio karakteristikoak 1-eko balioa du:

$$\Psi(0) = E\left(e^{i0x}\right) = E\left(e^0\right) = E(1) = 1$$

2. Funtzio karakteristikoa parametrikoa denez, t aldagai ororako jarraitua da.
3. Transformazio lineal baten funtzio karakteristikoaren kalkulua.

Izan bedi $Y = aX + b$

non X , $\Psi_X(t)$ funtzio karakteristikoa duen zorizko aldagaia den.

$$\Psi_Y(t) = E\left(e^{ity}\right) = E\left(e^{it(ax+b)}\right) = E\left(e^{itax} \cdot e^{itb}\right)$$

II. Propietateak

e^{itb} konstante bat denez, batezbestekoaren propietateak erabiliz

$$E\left(e^{itax} \cdot e^{itb}\right) = e^{itb} E\left(e^{itax}\right)$$

X aldagaiaren funtzio karakteristikoko parametroak (ta) balioa daukanean $E\left(e^{itax}\right) = \Psi_X(ta)$, beraz:

$$\Psi_Y(t) = e^{itb} \cdot \Psi_X(ta)$$

4. Aldagai independenteen arteko transformazio lineal baten funtzio karakteristikokoaren kalkulua.

Izan bedi $Z = aX + bY + c$

II. Propietateak

Z aldagaiaren funtzio karakteristikoa:

$$\Psi_Z(t) = E\left(e^{itz}\right) = E\left(e^{it(ax+by+c)}\right) = E\left(e^{itax} \cdot e^{itby} \cdot e^{itc}\right)$$

X eta Y independenteak direnez,

$$\Psi_Z(t) = E\left(e^{itax}\right) \cdot E\left(e^{itby}\right) \cdot E\left(e^{itc}\right)$$

e^{itc} konstante bat denez $E\left(e^{itc}\right) = e^{itc}$, $E\left(e^{itax}\right) = \Psi_X(ta)$, hau da, X aldagaiaren funtzio karakteristikoko parametroak (ta) balioa duenean.

Modu berean, $E\left(e^{itby}\right) = \Psi_Y(tb)$, hau da, Y aldagaiaren funtzio karakteristikoko parametroak (tb) balioa duenean, beraz,

II. Propietateak

$$\Psi_Z(t) = e^{itc} \cdot \Psi_X(ta) \cdot \Psi_Y(tb)$$

- Erantzun hau orokortu egin daiteke edozein $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ zorizko aldagai independenteren batuketa kopurura:

$$\Psi_X(t) = \Psi_{X_1}(a_1 t) \cdot \Psi_{X_2}(a_2 t) \cdot \dots \cdot \Psi_{X_n}(a_n t) = \prod_{j=1}^n \Psi_{X_i}(a_j t)$$

5. Zorizko aldagaiaren momentuen kalkulua funtzio karakteristikokoaren deribatuen bitartez.

- Lehenengo deribatua:

$$\Psi'(t) = \frac{dE(e^{itx})}{dt} = E \frac{de^{itx}}{dt} = E(e^{itx})ix$$

II. Propietateak

- Bigarren deribatua:

$$\Psi''(t) = \frac{dE(e^{itx})ix}{dt} = E \frac{de^{itx}ix}{dt} = E(e^{itx})(ix)^2$$

- Modu orokorrean k -garren deribatua:

$$\Psi^{(k)}(t) = \frac{dE(e^{itx})(ix)^{k-1}}{dt} = E \frac{d(e^{itx})(ix)^{k-1}}{dt} = E(e^{itx})(ix)^k$$

- Deribatuak $t = 0$ denean ebaluatzen badira:

$$\left. \frac{d\Psi(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(e^{itx})ix \Big|_{t=0} = iE(x)$$

II. Propietateak

- Modu orokorrean:

$$\left. \frac{d\Psi^k(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = i^k E(x^k)$$

- Beraz,

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d\Psi^k(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(x^k)}$$

- Edozein ordenetako momentuak kalkulatzeko oso erabilgarria da funtzio karakteristikoa.

2.5. Funtzio sortzailea

I. Definizioa

- Momentuen funtzio sortzailea honela definitzen da:

$$\alpha(w) = E\left(e^{wx}\right)$$

- Funtzio karakteristikoaren itxura berdina dauka, baina aurrekoa ez bezala, funtzio sortzailea existitu ez daiteke.
- Funtzio sortzailea existitu dadin $w \in (-a, a) \quad \forall a > 0$. Modu honetan funtzio sortzailea deribagarria da $w = 0$ puntuan.
- w parametroa it -z ordezkatzuz gero, funtzio karakteristikoa lortzen da.

$$\Psi(t) = \alpha(iw) = E\left(e^{iwx}\right)$$

I. Definizioa

- Zorizko aldagaia jarraitua bada, $f(x)$ bere dentsitate funtzioa izanik:

$$\alpha(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{wx} \cdot f(x) dx$$

- Zorizko aldagaia diskretua bada, $p(x)$ bere probabilitate funtzioa izanik:

$$\alpha(w) = \sum_{j=1}^n e^{wx_j} \cdot p(x_j)$$

- Funtzio sortzailean ere bakartasun-teorema betetzen da. Banaketa funtzio bera jarraitzen duten aldagai guztiek funtzio sortzaile bera dute eta alderantziz.

II. Propietateak

1. Parametroak balio nulua duenean, hau da, $w = 0$ denean, funtzio karakteristikoak 1-eko balioa du:

$$\alpha(0) = E(e^{0x}) = E(e^0) = E(1) = 1$$

2. Funtzio sortzailea parametrikoa denez, w ororako jarraitua da.
3. Transformazio lineal baten funtzio karakteristikoaren kalkulua.

Izan bedi $Y = aX + b$

non X , $\alpha_X(w)$ funtzio sortzailea duen zorizko aldagaia den.

$$\alpha_Y(w) = E(e^{wy}) = E(e^{w(ax+b)}) = E(e^{wax} \cdot e^{wb})$$

II. Propietateak

e^{wb} konstante bat denez, batezbestekoaren propietateak erabiliz

$$E\left(e^{wax} \cdot e^{wb}\right) = e^{wb} E\left(e^{wax}\right)$$

X aldagaiaren funtzio sortzaileko parametroak (wa) balioa daukanean $E\left(e^{wax}\right) = \alpha_X(wa)$, beraz:

$$\alpha_Y(a) = e^{wb} \cdot \alpha_X(wa)$$

4. Aldagai independenteen arteko transformazio lineal baten funtzio sortzailearen kalkulua.

Izan bedi $Z = aX + bY + c$

II. Propietateak

Z aldagaiaren funtzio sortzailea:

$$\alpha_Z(w) = E\left(e^{wz}\right) = E\left(e^{w(ax+by+c)}\right) = E\left(e^{wax} \cdot e^{wby} \cdot e^{wc}\right)$$

X eta Y independenteak direnez,

$$\alpha_Z(w) = E\left(e^{wax}\right) \cdot E\left(e^{wby}\right) \cdot E\left(e^{wc}\right)$$

e^{wc} konstante bat denez $E\left(e^{wc}\right) = e^{wc}$, $E\left(e^{wax}\right) = \alpha_X(wa)$, hau da, X aldagaiaren funtzio sortzaileko parametroak (wa) balioa duenean.

Modu berean, $E\left(e^{wby}\right) = \alpha_Y(wb)$, hau da, Y aldagaiaren funtzio sortzaileko parametroak (wb) balioa duenean, beraz,

II. Propietateak

$$\alpha_Z(w) = e^{wc} \cdot \alpha_X(wa) \cdot \alpha_Y(wb)$$

- Erantzun hau orokortu egin daiteke edozein $X_1, X_2, \dots, X_n$ zorizko aldagai independenteren batuketa kopurura:

$$\alpha(w) = \alpha_{x_1}(a_1 w) + \alpha_{x_2}(a_2 w) + \dots + \alpha_{x_n}(a_n w) = \prod_{i=1}^n \alpha_{x_i}(a_i w)$$

5. Zorizko aldagaiaren momentuak funtzio sortzailearen deribatuen bidez lortu daitezke:

- Lehenengo deribatua:

$$\alpha(t) = \frac{dE(e^{wx})}{dw} = E \frac{de^{wx}}{dw} = E(e^{wx})x$$

II. Propietateak

- Bigarren deribatua:

$$\alpha''(w) = \frac{dE(e^{wx})x}{dw} = E \frac{de^{wx}x}{dw} = E(e^{wx})x^2$$

- Modu orokorrean k -garren deribatua:

$$\alpha^{(k)}(w) = \frac{dE(e^{wx})x^{k-1}}{dw} = E \frac{d(e^{wx})x^{k-1}}{dw} = E(e^{wx})x^k$$

- Deribatuak $w = 0$ denean ebaluatzen badira k ordenako momentuak lortzen dira :

$$\left. \frac{d\alpha(w)}{dw} \right|_{w=0} = E(e^{wx})x \Big|_{w=0} = E(x) \quad \text{Lehen ordenako momentua}$$

II. Propietateak

- Modu orokorrean, k -garren momentua lortzeko:

$$\left. \frac{d\alpha^k(w)}{dt^k} \right|_{w=0} = E(e^{wx})x^k \Big|_{w=0} = E(x^k)$$

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

