Autoevaluación

OCW 2019: *Curso práctico para el análisis e inferencia estadística con Mathematica*

Test nº2 (resolución)

Equipo docente del curso
Arrospide Zabala, Eneko
Martín Yagüe, Luis
Unzueta Inchaurbe, Aitziber
Soto Merino, Juan Carlos
Durana Apaolaza, Gaizka
Bikandi Irazabal, Iñaki

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN: Test nº2

Ejercicio nº1

Enunciado

En un comedor escolar se ofrecen cinco tipos diferentes de fruta (cerezas, manzana, naranja, pera y plátano) servidos en boles. En cada bol sólo hay un tipo de fruta. Como es el día de la fruta se deben coger dos boles pudiendo repetirse la fruta escogida. ¿De cuántas formas diferentes se puede realizar la elección del postre?

Resolución

```
frutas = {🍒, 🍎, 🍊, 🍐, 🍌};
```

```
a1 = Select[Tuples[Sort[frutas], 2], OrderedQ]
Length[a1]
```

```
{{🍐, 🍐}, {🍐, 🍌}, {🍐, 🍎}, {🍐, 🍊}, {🍐, 🍒}, {🍌, 🍌}, {🍌, 🍎}, {🍌, 🍊},
 {🍌, 🍒}, {🍎, 🍎}, {🍎, 🍊}, {🍎, 🍒}, {🍊, 🍊}, {🍊, 🍒}, {🍒, 🍒}}
```

```
15
```

Conteo de casos calculando combinaciones con repetición, $CR_{5,2} = \binom{6}{2} = 15$

```
total = 5; bol = 2;
```

```
Binomial[total + bol - 1, bol]
```

```
15
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº2

Enunciado

De una baraja de 40 naipes (diez por cada palo numerados del 1 al 10) se extraen simultáneamente 4 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer tres naipes con el mismo número?

Resolución

Regla de Laplace (todas las cartas tienen la misma probabilidad de ser escogidas):

- Número de casos posibles (extracciones de 4 cartas de la baraja): $C_{40,4} = \binom{40}{4} = 91\,390$

```
Binomial[40, 4]
```

```
91 390
```

- Número de casos favorables: $10 \cdot C_{4,3} \cdot C_{36,1} = 10 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{36}{1} = 1440$
  - hay cuatro cartas con el mismo número (una de cada palo)
  - la baraja tiene 10 números distintos

```
10 * Binomial[4, 3] * Binomial[36, 1]
```

```
1440
```

Siendo el suceso $A =$"*tres de los cuatro naipes tienen el mismo número*" la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{1440}{91\,390} \approx 0.0158$$

```
N[1440 / 91 390, 3]
```

```
0.0158
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$

Ejercicio nº3

Enunciado

En un estuche hay 20 bolígrafos de los cuales 4 no tienen tinta. Se eligen 5 bolígrafos de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los bolígrafos elegidos no tenga tinta?

Resolución

Sea el suceso $B =$"*de los 5 bolígrafos escogidos, al menos, uno no tiene tinta*"

Para el cálculo de la probabilidad es más sencillo considerar el suceso complementario $B^C =$"*los 5 bolígrafos escogidos tienen tinta*"

Regla de Laplace (todos los bolígrafos tienen la misma probabilidad de ser escogidos):

- Número de casos posibles (extracciones de 5 bolígrafos del estuche): $C_{20,5} = \binom{20}{5} = 15\,504$

```
Binomial[20, 5]
```

```
15 504
```

- Número de casos favorables a la ocurrencia del suceso B^C: $C_{4,0} \cdot C_{16,5} = \binom{4}{0} \cdot \binom{16}{5} = 4368$
  - hay cuatro bolígrafos sin tinta de los que no se extrae ninguno
  - hay 16 bolígrafos con tinta de los que se extraen cinco

```
Binomial[4, 0] * Binomial[16, 5]
```

```
4368
```

Entonces: $P(B^C) = \frac{4368}{15\,504} \approx 0.2817$

```
N[4368 / 15 504, 4]
```

```
0.2817
```

La probabilidad pedida es: $P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{4368}{15\,504} \approx 0.7183$

```
1 - N[4368 / 15 504, 4]
```

```
0.7183
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº4

Enunciado

Un club de montaña debe elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero entre sus 30 socios. Si ninguna persona puede tener mas de un cargo, ¿de cuántas maneras se puede realizar la elección?

Resolución

Conteo de casos calculando variaciones, $V_{30,4} = \frac{30!}{(30-4)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$

```
socios = 30; cargos = 4;
```

```
Factorial[socios] / Factorial[socios - cargos]
```

```
657 720
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº5

Enunciado

Una persona debe realizar un test de 20 preguntas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas y se supera el test al contestar 15 correctamente. Como no ha estudiado decide responder al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte exactamente 15 respuestas?

Resolución

El experimento aleatorio consta de la repetición de 20 pruebas de Bernoulli

El espacio muestral de cada pregunta del test es: $\Omega_i = \{\, A\,(\text{acierto}),\ X\ (\text{error})\,\}\ \ \forall\ i \in [1, 20]$

Sea el suceso C =*"contestar de forma correcta exactamente 15 preguntas del test de 20 preguntas"*

Se calcula la probabilidad de un suceso elemental consistente en acertar 15 preguntas y fallar 5; por ejemplo:

$$S_1 = A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap A \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X$$

- Probabilidad de contestar correctamente 15 preguntas: $\left(\frac{1}{4}\right)^{15} \approx 9.313 \cdot 10^{-10}$

```
p15A = N[(1 / 4) ^15, 4]
```

9.313×10^{-10}

- Probabilidad de contestar incorrectamente 5 preguntas: $\left(\frac{3}{4}\right)^{5} \approx 0.2373$

```
p5X = N[(3/4)^5, 4]
```

0.2373

Todos los sucesos elementales consistentes en acertar 15 preguntas y fallar cinco son equiprobables

El número total de ese tipo de sucesos elementales es: $C_{20,15} = \binom{20}{15} = 15\,504$

```
ns = Binomial[20, 15]
```

15 504

La probabilidad pedida es: $P(C) = C_{20,15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \approx 3.426 \cdot 10^{-6}$

```
ns * p15A * p5X
```

3.426×10^{-6}

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{e}}$

Ejercicio nº6

Enunciado

En un concesionario de coches se decide pintar los 20 coches que tienen a la venta. Si se dispone de material suficiente para pintar 7 coches con pintura roja, 5 con pintura blanca y los otros 8 con pintura negra, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden pintar los coches?

Resolución

```
coches = 20; rojo = 7; blanco = 5; negro = 8;
```

Conteo de casos calculando permutaciones con repetición: $PR_{20}^{7,5,8} = \frac{20!}{7!\cdot 8!\cdot 5!} = 99\,768\,240$

```
Factorial[coches] / (Factorial[rojo] * Factorial[blanco] * Factorial[negro])
```

99 768 240

Principio de recuento. Conteo de casos calculando combinaciones:
$C_{20,7} \cdot C_{13,5} \cdot C_{8,8} = \frac{20!}{7!\cdot 13!} \cdot \frac{13!}{5!\cdot 8!} \cdot 1 = 99\,768\,240$

```
Binomial[coches, rojo] * Binomial[coches - rojo, blanco] * Binomial[coches - rojo - blanco, negro]
```

99 768 240

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{f}}$

Ejercicio nº7

Enunciado

¿Cuántas palabras diferentes se pueden construir con las letras de la palabra SALSA?

Resolución

Conteo de casos obteniendo todas las posibles palabras:

```
letras = {"S", "A", "L", "S", "A"};
```

```
palabras = Map[StringJoin, Permutations[letras]]
```

```
{SALSA, SALAS, SASLA, SASAL, SAALS, SAASL, SLASA, SLAAS, SLSAA, SSALA,
 SSAAL, SSLAA, ASLSA, ASLAS, ASSLA, ASSAL, ASALS, ASASL, ALSSA, ALSAS,
 ALASS, AASLS, AASSL, AALSS, LSASA, LSAAS, LSSAA, LASSA, LASAS, LAASS}
```

```
Length[palabras]
```

```
30
```

Conteo de casos calculando permutaciones con repetición, $PR_5^{2,2,1} = \dfrac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{c}}$

Ejercicio nº8

Enunciado

¿De cuántas maneras se pueden alinear ocho estudiantes, cuatro chicos y cuatro chicas, si en la fila se alternan chicos y chicas?

Resolución

Si las chicas están colocadas en las posiciones impares, los posibles casos se obtienen permutando las chicas por un lado y permutando los chicos por otro lado: $P_4 \cdot P_4 = 4! \cdot 4! = 576$

```
Factorial[4] * Factorial[4]
```

```
576
```

Otro tanto ocurre si las chicas están colocadas en las posiciones pares y los chicos en las impares: $P_4 \cdot P_4 = 4! \cdot 4! = 576$

Entonces, el número de formas de disponerles es: $2 \cdot P_4 \cdot P_4 = 1152$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{a}}$

Ejercicio nº9

Enunciado

Se lanzan cinco dados equilibrados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres seises?

Resolución

El experimento aleatorio consta de la repetición de cinco pruebas de Bernoulli

Teniendo en cuenta el resultado que se desea analizar, el espacio muestral de cada lanzamiento de un dado es:

$$\Omega_i = \left\{ 6\,(\text{obtener } 6),\ \overline{6}\,(\text{ no obtener } 6) \right\} \ \ \forall\, i \in [1, 5]$$

El espacio muestral del experimento es:

Ω = **Tuples**$[\{6, \overline{6}\}, 5]$

$$\{\{6,6,6,6,6\}, \{6,6,6,6,\overline{6}\}, \{6,6,6,\overline{6},6\}, \{6,6,6,\overline{6},\overline{6}\},$$
$$\{6,6,\overline{6},6,6\}, \{6,6,\overline{6},6,\overline{6}\}, \{6,6,\overline{6},\overline{6},6\}, \{6,6,\overline{6},\overline{6},\overline{6}\},$$
$$\{6,\overline{6},6,6,6\}, \{6,\overline{6},6,6,\overline{6}\}, \{6,\overline{6},6,\overline{6},6\}, \{6,\overline{6},6,\overline{6},\overline{6}\}, \{6,\overline{6},\overline{6},6,6\},$$
$$\{6,\overline{6},\overline{6},6,\overline{6}\}, \{6,\overline{6},\overline{6},\overline{6},6\}, \{6,\overline{6},\overline{6},\overline{6},\overline{6}\}, \{\overline{6},6,6,6,6\}, \{\overline{6},6,6,6,\overline{6}\},$$
$$\{\overline{6},6,6,\overline{6},6\}, \{\overline{6},6,6,\overline{6},\overline{6}\}, \{\overline{6},6,\overline{6},6,6\}, \{\overline{6},6,\overline{6},6,\overline{6}\}, \{\overline{6},6,\overline{6},\overline{6},6\},$$
$$\{\overline{6},6,\overline{6},\overline{6},\overline{6}\}, \{\overline{6},\overline{6},6,6,6\}, \{\overline{6},\overline{6},6,6,\overline{6}\}, \{\overline{6},\overline{6},6,\overline{6},6\}, \{\overline{6},\overline{6},6,\overline{6},\overline{6}\},$$
$$\{\overline{6},\overline{6},\overline{6},6,6\}, \{\overline{6},\overline{6},\overline{6},6,\overline{6}\}, \{\overline{6},\overline{6},\overline{6},\overline{6},6\}, \{\overline{6},\overline{6},\overline{6},\overline{6},\overline{6}\}\}$$

Sea el suceso D =*"obtener exactamente 3 seises al lanzar 5 dados equilibrados"*

Se calcula la probabilidad de un suceso elemental consistente en obtener 3 seises y 2 números diferentes de 6; por ejemplo:

$$S_1 = 6 \cap 6 \cap 6 \cap \overline{6} \cap \overline{6}$$

- Probabilidad de obtener exactamente 3 seises: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0.0046$

```
p36 = N[(1/6)^3, 2]
```

```
0.0046
```

- Probabilidad de obtener dos números diferentes de 6: $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0.6944$

```
p2n6 = N[(5/6)^2, 4]
```

```
0.6944
```

Todos los sucesos elementales consistentes en obtener 3 seises y 2 números diferentes de seis son equiprobables

El número total de este tipo de sucesos elementales es: $C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$

```
ns = Binomial[5, 3]
```

```
10
```

La probabilidad pedida es: $P(D) = C_{5,3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.032$

```
N[ns * p36 * p2n6, 4]
```

```
0.032
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº10

Enunciado

¿Cuántos números de dos cifras se pueden obtener con los dígitos "1", "2", "3", "4" y "5"?

Resolución

Conteo de casos obteniendo todos los posibles números:

```
num = Tuples[{1, 2, 3, 4, 5}, {2}]
```

```
{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 1}, {2, 2},
 {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 1},
 {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}
```

```
Length[num]
```

```
25
```

Conteo de casos calculando variaciones, $VR_{5,2} = 5^2 = 25$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$