Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Material de estudio

OCW 2019: *Curso práctico para el análisis e inferencia estadística con Mathematica*

Tema 8. Contraste de hipótesis

Equipo docente del curso
Arrospide Zabala, Eneko
Martín Yagüe, Luis
Unzueta Inchaurbe, Aitziber
Soto Merino, Juan Carlos
Durana Apaolaza, Gaizka
Bikandi Irazabal, Iñaki

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

TEMA 8. CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Introducción

Definición

Una hipótesis estadística es una enunciación sobre la naturaleza de una población. Generalmente, se formula en términos de un cierto parámetro desconocido θ de la población.

El contraste de hipótesis es una técnica de la Estadística inferencial que permite comprobar si la información que proporciona una muestra observada concuerda (ó no) con la hipótesis estadística formulada:

- por lo general, las hipótesis establecen que un cierto parámetro poblacional tiene un valor o pertenece a una determinada región
- se toma una muestra aleatoria representativa de la población para decidir si se acepta o no la hipótesis estadística planteada
- si la información muestral es consistente con la hipótesis estadística entonces se acepta dicha hipótesis; en caso contrario, se rechaza

Tipos de contraste

Se denomina hipótesis nula, denotada H_0, a la enunciación acerca de un parámetro de la población que se somete a contraste. La hipótesis contraria a la nula se denomina alternativa y se denota como H_1 ó H_a.

La hipótesis nula suele presentarse como una igualdad del tipo $H_0 : \theta = \theta_0$, donde θ_0 denota un hipotético valor para un parámetro θ de la población.

Los tipos de contrastes dependen de la forma de plantear la hipótesis alternativa:

- bilateral o de dos colas, $H_a : \theta \neq \theta_0$
- unilateral a la derecha o de una cola a la derecha, $H_a : \theta > \theta_0$
- unilateral a la izquierda o de una cola a la izquierda, $H_a : \theta < \theta_0$

También, es frecuente expresar H_0 como negación exacta de H_a en cuyo caso sí puede ser una desigualdad no estricta.

Procedimiento y decisión

Para el contraste de una hipótesis nula se determina:

- un estadístico, denominado estadístico del contraste (EC, en adelante en este texto), que sigue un modelo de distribución de probabilidad conocido; su valor (ec, en adelante) se calcula a partir de los datos de la muestra
- la región crítica o región de rechazo (RC, en adelante en este texto) que está definida como el conjunto de valores del estadístico de contraste para los que se rechaza la hipótesis nula
- un nivel de significación (α) que es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es cierta; se denomina nivel de confianza al valor $1 - \alpha$.

El contraste estadístico de H_0 queda completamente especificado al determinar el valor del estadístico de contraste y la región crítica.

Decisión que se adopta:

$$\boxed{\textit{con una significación } \alpha \begin{cases} \text{si } ec \in RC \Rightarrow & \textit{se rechaza } H_0 \\ \text{si } ec \notin RC \Rightarrow & \textit{no se rechaza } H_0 \end{cases}}$$

Nivel crítico o *p-valor*

El *p-valor* o nivel crítico asociado a un contraste se define como el mínimo nivel de significación con el que la hipótesis nula será rechazada a favor de la alternativa.

Su cálculo depende del tipo de contraste planteado:

- unilateral a la derecha: $\boxed{p = P(EC > ec \mid H_0)}$
- unilateral a la izquierda: $\boxed{p = P(EC < ec \mid H_0)}$
- bilateral: $\boxed{p = 2 \times min\{P(EC < ec \mid H_0), P(EC > ec \mid H_0)\}}$

Mathematica implementa diferentes funciones para el cálculo del *p-valor* dependiendo del modelo de distribución de probabilidad (necesitan la carga del paquete `HypothesisTesting``):

- `NormalPValue[ec,TwoSided→False]`: para la distribución normal estándar
- `StudentTPValue[ec,ν,TwoSided→False]`: para una t de Student denotando ν los grados de libertad
- `ChiSquarePValue[ec,ν,TwoSided→False]`: para una *ji*-cuadrado denotando ν los grados de libertad
- `FRatioPValue[ec,ν1,ν2,TwoSided→False]`: para una F de Fisher siendo ν_1 y ν_2 los grados de libertad

Tipos de error

Como el contraste de una hipótesis sólo puede tener dos resultados entonces, al tomar la decisión sólo puede haber dos tipos de error:

- tipo I (o falso negativo): se rechaza la hipótesis nula, H_0, siendo cierta
- tipo II (o falso positivo): se acepta la hipótesis nula, H_0, siendo falsa

Las probabilidades de cometer cada uno de estos dos tipos de error miden el riesgo de tomar una decisión incorrecta al realizar un contraste de hipótesis:

- nivel de significación, $\alpha = P(\textit{error tipo I})$
- $\beta = P(\textit{error tipo II})$

Las probabilidades de tomar una decisión correcta en un contraste de hipótesis se denominan:

- nivel de confianza, $1 - \alpha = P(\textit{aceptar } H_0 \textit{ cuando es cierta})$
- potencia, $1 - \beta = P(\text{rechazar } H_0 \textit{ cuando es falsa})$

Contraste para la media poblacional

Funciones del programa

El contraste puede realizarse calculando el valor del estadístico del contraste y analizando si pertenece a la región crítica para la toma de la decisión adecuada.

El programa *Mathematica* facilita las siguientes funciones:

- **MeanTest[*list*,μ_0]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ para la media poblacional. Se estima a partir de la muestra *list*, formada por n elementos, extraída de la población. Da el p-valor del contraste. Necesita la carga del paquete `HypothesisTesting`` . Admite las siguientes opciones:
  - **FullReport→False**. Aporta un informe completo del test si se especifica el valor `True`; por defecto, el valor lógico asignado es `False`.
  - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste.
  - **KnownVariance→σ^2**. Se indica la varianza de la población si es conocida; por defecto, None.
  - **TwoSided→False**. Realiza un test bilateral si se especifica el valor `True`; por defecto, el valor lógico asignado es `False` (en este caso, el test es unilateral a la derecha).
- **Nota.** Al ejecutar **MeanTest** el programa devuelve, antes de mostrar la salida, un mensaje en el que indica que la función ha quedado obsoleta y ha sido reemplazada por **LocationTest**. Sin embargo, puede seguir resultando útil.

- **LocationTest[*list*,μ_0,*"property"*,*"test"*]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ para la media poblacional estimada a partir de la lista *list* formada por n elementos. También, sirve para contrastar la mediana poblacional. Por defecto, devuelve el p-valor. Necesita la carga del paquete `HypothesisTesting``. Los argumentos y opciones más comunes son:
  - ***"property"***. Propiedades relacionadas con el informe requerido de los resultados del test; se incluyen algunas de ellas (se aconseja consultar la *Ayuda* para su análisis):

Propiedad	***Informe de resultados***
"AllTests"	Lista de todos los test que pueden aplicarse
"PValue"	Lista del p – valores
"TestConclusion"	Descripción de la conclusión de un test
"TestDataTable"	Tabla con los p – valores y los estadísticos del test

  - ***"test"***. Los test usados para la media suponen que los datos de la muestra (*list*) están distribuidos normalmente:

Test	***Descripción***
"Z"	Contraste con varianza conocida
"T"	Contraste para una o dos muestras
"PairedZ"	Contraste para muestras pareadas con varianza conocida
"PairedT"	Contraste para muestras pareadas con varianza desconocida

  - **AlternativeHypothesis→"Unequal"**. Por defecto, el contraste es bilateral con la hipótesis alternativa $H_a : \mu \neq \mu_0$; indicando los valores **"Greater"** y **"Less"** se realizan contrastes unilaterales a la derecha ($H_a : \mu > \mu_0$) y a la izquierda ($H_a : \mu < \mu_0$), respectivamente.
  - **Method→Automatic**. Se escoge de forma automática el método para el cálculo de p-valores.
  - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
  - **VerifyTestAssumptions**. Verifica ciertos supuestos para la realización del test: igualdad de varianzas de dos poblaciones (**"EqualVariance"**), normalidad (**"Normality"**) o simetría alrededor de la mediana (**"Symmetry"**). Por defecto, su valor es **Automatic**.

- **ZTest[*list*,σ^2,μ_0,*"property"*,*"test"*]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ para la media poblacional estimada a partir de la lista *list* formada por n elementos y cuando la varianza poblacional es conocida. Por defecto, devuelve el p-valor. Necesita la carga del paquete HypothesisTesting`. Los argumentos y opciones más comunes son:
  - ***"property"***. Propiedades relacionadas con el informe requerido de los resultados del test.
  - **AlternativeHypothesis→"Unequal"**. Por defecto, el contraste es bilateral con la hipótesis alternativa $H_a : \mu \neq \mu_0$; indicando los valores **"Greater"** y **"Less"** se realizan contrastes unilaterales a la derecha ($H_a : \mu > \mu_0$) y a la izquierda ($H_a : \mu < \mu_0$), respectivamente.
  - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
  - **VerifyTestAssumptions**. Verifica el supuesto de normalidad de los datos (**"Normality"**).
- **TTest[*list*,μ_0,*"property"*,*"test"*]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ para la media poblacional estimada a partir de la lista *list* formada por n elementos y cuando la varianza poblacional es desconocida. Por defecto, devuelve el p-valor. Para muestras univariantes supone que el estadístico del contraste sigue un modelo de distribución t de Student y utiliza ese test. Necesita la carga del paquete HypothesisTesting`. Los argumentos y opciones más comunes son:
  - ***"property"***. Propiedades relacionadas con el informe requerido de los resultados del test.
  - **AlternativeHypothesis→"Unequal"**. Por defecto, el contraste es bilateral con la hipótesis alternativa $H_a : \mu \neq \mu_0$; indicando los valores **"Greater"** y **"Less"** se realizan contrastes unilaterales a la derecha ($H_a : \mu > \mu_0$) y a la izquierda ($H_a : \mu < \mu_0$), respectivamente.
  - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
  - **VerifyTestAssumptions**. Verifica los supuestos de la normalidad (**"Normality"**) o de la igualdad de varianzas de dos poblaciones (**"EqualVariance"**).

Dada la naturaleza de las funciones descritas, se van a usar **MeanTest** y **ZTest** cuando la varianza sea conocida; sin embargo, cuando no se conozca se usarán **LocationTest** y **TTest**. Téngase en cuenta que el test **"Z"** implementado en la función **LocationTest** considera la cuasivarianza muestral como estimación de la varianza poblacional; por tanto, tiene sentido usarla cuando dicha varianza no sea conocida y el tamaño muestral sea grande.

Hipótesis del contraste

Hipótesis que pueden plantearse:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$

Supuestos adicionales: población normal y σ conocida

Estadístico del contraste: $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\overline{x} - \mu_0 > z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\overline{x} - \mu_0 < -z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Supuestos adicionales: población normal y σ desconocida

Estadístico del contraste: $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\lvert\overline{x}-\mu_0\rvert > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\overline{x}-\mu_0 > t_{n-1;\alpha} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\overline{x}-\mu_0 < -t_{n-1;\alpha} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

Supuestos adicionales: cualquier población ($n > 30$)

Estadístico del contraste: $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\lvert\overline{x}-\mu_0\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\overline{x}-\mu_0 > z_{\alpha} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\overline{x}-\mu_0 < -z_{\alpha} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

Ejemplo

El peso de los niños de seis meses sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Para analizar el peso medio de los niños en una región de un determinado país se toma la siguiente muestra: $\{6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950\}$. Con una confianza del 90%, se quiere contrastar si $\mu = 6.000\,kg$ siendo: a) $\sigma = 1.2\,kg$ y b) σ desconocida. ¿Y si se quiere contrastar la hipótesis $\mu > 6.000\,kg$ con la misma confianza y en los mismos supuestos?

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- definición de la muestra

```
lista = {6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950};
```

- definición y cálculo de valores

```
α = 0.10; n = Length[lista];
```

```
med = Mean[lista]; S = StandardDeviation[lista];
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & \mu = 6.000 = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq 6.000 = \mu_0 \end{cases}$

- a) $\sigma = 1.2\,kg$

  - definición de σ

```
σ = 1.2;
```

  - usando **MeanTest**

```
MeanTest[lista, μ0 = 6.000, FullReport → True,
 KnownVariance → σ^2, SignificanceLevel → α, TwoSided → True]
```

General: The function MeanTest is now obsolete and has been superseded by LocationTest.

```
{FullReport → Mean      TestStat   Distribution
              6.03636   0.100504   NormalDistribution[0, 1] ,
 TwoSidedPValue → 0.919944, Fail to reject null hypothesis at significance level → 0.1}
```

- usando **ZTest**

```
ZTest[lista, σ^2, 6.000, "TestDataTable",
 AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
Z	0.100504	0.919944

- Se observa, en ambos casos, que $p-valor > \alpha = 0.10$; por tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que la media poblacional es $\mu = 6.000\, kg$

- b) σ desconocida
  - usando **LocationTest**

```
LocationTest[lista, μ0 = 6.000, "T", AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → α]
0.701621
```

- usando **TTest**

```
TTest[lista, 6.000, "TestDataTable", AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
T	0.394323	0.701621

- Se observa, en ambos casos, que $p-valor > \alpha = 0.10$; por tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que la media poblacional es $\mu = 6.000\, kg$

- c) Contraste de la hipótesis $\mu > 6.000\, kg$ con la misma confianza y en los mismos supuestos
  - Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & \mu \le 6.000 = \mu_0 \\ H_1: & \mu > 6.000 = \mu_0 \end{cases}$
  - con $\sigma = 1.2\, kg$
    - usando **MeanTest**

```
MeanTest[lista, μ0 = 6.000, FullReport → True,
 KnownVariance → σ^2 , SignificanceLevel → α, TwoSided → False]
```

```
{FullReport → Mean      TestStat   Distribution
              6.03636   0.100504   NormalDistribution[0, 1] ,
 OneSidedPValue → 0.459972, Fail to reject null hypothesis at significance level → 0.1}
```

- usando **ZTest**

```
ZTest[lista, σ^2, 6.000, "TestDataTable",
 AlternativeHypothesis → "Greater", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
Z	0.100504	0.459972

- σ desconocida
    - usando **TTest**

```
TTest[lista, 6.000, "TestDataTable", AlternativeHypothesis → "Greater", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
T	0.394323	0.35081

- usando **LocationTest**

```
LocationTest[lista, μ0 = 6.000, "T", AlternativeHypothesis → "Greater", SignificanceLevel → α]
```

```
0.35081
```

- Se observa, en todas las salidas, que $p - valor > \alpha = 0.10$; por tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que la media poblacional es $\mu \leq 6.000\ kg$

Contraste para la diferencia de dos medias poblacionales

Funciones del programa

El contraste puede realizarse calculando el valor del estadístico del contraste y analizando si pertenece a la región crítica para la toma de la decisión adecuada.

El programa *Mathematica* facilita las siguientes funciones:

- **MeanDifferenceTest[*list1*,*list2*,μ_0]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ para la diferencia de dos medias poblacionales. Se estima a partir de las muestras *list1* y *list2*, formadas por n_1 y n_2 elementos respectivamente, extraídas de ambas poblaciones. Devuelve el p-valor del contraste. Necesita la carga del paquete `HypothesisTesting``. Opciones:
    - **FullReport→False**. Aporta un informe completo del test si se especifica el valor `True`; por defecto, el valor lógico asignado es `False`.
    - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste.
    - **KnownVariance→$\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$**. Se indican, en una lista, las varianzas de las poblaciones si son conocidas; por defecto, `None`.
    - **EqualVariances→True**. Se utiliza para indicar que las varianzas de las poblaciones se asumen como iguales a pesar de no ser conocidas; por defecto, `False`.
    - **TwoSided→False**. Realiza un test bilateral si se especifica el valor `True`; por defecto, el valor lógico asignado es `False` (en este caso, el test es unilateral a la derecha).

Pueden usarse las funciones descritas anteriormente incluyendo las muestras recogidas como elementos de una lista, **{*list1*, *list2*}**, en el primer argumento. **MeanTest** y **ZTest** cuando las varianzas poblacionales sean conocidas y **LocationTest** y **TTest** cuando no se conozcan.

Muestras independientes

Sean dos poblaciones diferentes de medias μ_1 y μ_2 y desviaciones típicas σ_1 y σ_2 , respectivamente.

Dos muestras son independientes si la selección de los datos de una población no está relacionada con la de los datos de la otra.

Se consideran dos muestras independientes extraídas aleatoriamente de esas poblaciones. Los tamaños de ambas muestras se denotan n_1 y n_2, respectivamente.

Se va a utilizar la información suministrada por las dos muestras para contrastar la diferencia de las medias poblacionales: $\mu_1 - \mu_2$.

Muestras dependientes (datos pareados)

Si las muestras se seleccionan de manera que cada medida en una de ellas pueda asociarse naturalmente con una medida en la otra muestra se llaman muestras dependientes.

Si dos muestras son dependientes entonces, necesariamente, tienen el mismo tamaño; los datos van emparejados por individuos.

Para contrastar la diferencia de las medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$ se obtiene una nueva muestra como la diferencia entre los valores correspondientes a un mismo individuo en las dos muestras dadas. Así, el problema se reduce al contraste de una media.

A su vez, puede usarse la función `LocationTest` asignando al argumento ***"test"*** los valores **"PairedZ"** o **"PairedT"**.

El programa, también, habilita las funciones `PairedZTest` y `PairedTTest`.

Hipótesis del contraste

Hipótesis que pueden plantearse:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < \mu_0 \end{cases}$

Supuestos adicionales: poblaciones normales (ó $n_1, n_2 > 100$) y σ_1 y σ_2 conocidas

Estadístico del contraste: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_0, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\frac{\lvert(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \mu_0\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$	$\frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -z_\alpha$

Supuestos adicionales: poblaciones normales ($n_1, n_2 < 30$) y σ_1 y σ_2 desconocidas pero iguales

Estadístico del contraste: $\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \mu_0}{S_P \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$

Siendo: $S_P = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\frac{\lvert(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \mu_0\rvert}{S_P \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \mu_0}{S_P \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\alpha}$	$\frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \mu_0}{S_P \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < -t_{n_1+n_2-2;\alpha}$

Supuestos adicionales: poblaciones cualesquiera (n_1, $n_2 > 15$) y σ_1 y σ_2 conocidas

Estadístico del contraste: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_0, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\frac{\lvert(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$	$\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -z_\alpha$

Supuestos adicionales: poblaciones cualesquiera y σ_1 y σ_2 desconocidas (n_1, $n_2 \geq 30$)

Estadístico del contraste: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_0, \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right)$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\frac{\lvert(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0\rvert}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$	$\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} < -z_\alpha$

Supuestos adicionales: poblaciones cualesquiera y σ_1 y σ_2 desconocidas y distintas (muestras pequeñas)

Estadístico del contraste: $\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu$

Los grados de libertad se calculan con la aproximación de Welch: $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}} - 2$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\frac{\lvert(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0\rvert}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} > t_{\nu;\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} > t_{\nu;\alpha}$	$\frac{(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-\mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} < -t_{\nu;\alpha}$

Ejemplo

El peso de los niños de seis meses sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Para analizar la igualdad de las medias de los pesos de los niños en dos regiones de un país se toman dos muestras independientes: $\{6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950\}$ y $\{6.000, 5.650, 5.750, 5.950, 6.200, 6.250, 5.800, 5.950, 6.350, 6.050\}$. Se quiere contrastar, con un 95% de confianza, si las medias de ambas poblaciones son iguales suponiendo que: a) $\sigma_1 = 1.2\,kg$, $\sigma_2 = 1.5\,kg$, b) σ_1, σ_2 desconocidas pero iguales y c) σ_1, σ_2 desconocidas y desiguales

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = 0 = \mu_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq 0 = \mu_0 \end{cases}$

- definición de las muestras

```
muestra1 = {6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950};
muestra2 = {6.000, 5.650, 5.750, 5.950, 6.200, 6.250, 5.800, 5.950, 6.350, 6.050};
```

- definición y cálculo de valores

```
mu0 = 0;

α = 0.05; n1 = Length[muestra1]; n2 = Length[muestra2];

m1 = Mean[muestra1]; S1 = StandardDeviation[muestra1];

m2 = Mean[muestra2]; S2 = StandardDeviation[muestra2];
```

- a) $\sigma_1 = 1.2\,kg$, $\sigma_2 = 1.5\,kg$
  - definición de σ_1, σ_2

```
σ1 = 1.2; σ2 = 1.5;
```

- usando **MeanDifferenceTest**

```
MeanDifferenceTest[muestra1, muestra2, mu0, FullReport → True,
 TwoSided → True, KnownVariance → {σ1^2, σ2^2}, SignificanceLevel → α]
```

```
{FullReport →  MeanDiff    TestStat    Distribution
               0.0413636   0.0693345   NormalDistribution[0, 1] ,
 TwoSidedPValue → 0.944723, Fail to reject null hypothesis at significance level → 0.05}
```

- usando **ZTest**

```
ZTest[{muestra1, muestra2}, {σ1^2, σ2^2}, mu0,
 AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → α]
```

```
0.944723
```

- En ambos casos, se observa que $p - valor > \alpha = 0.05$ siendo, además, el $p - valor$ muy elevado; por tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que las medias poblacionales son iguales $\mu_1 = \mu_2$

- b) σ_1, σ_2 desconocidas pero iguales
  - usando **MeanDifferenceTest**

```
MeanDifferenceTest[muestra1, muestra2, mu0, EqualVariances → True,
 FullReport → True, TwoSided → True, KnownVariance → None, SignificanceLevel → α]
```

```
{FullReport →  MeanDiff    TestStat    Distribution
               0.0413636   0.349665    StudentTDistribution[19] ,
 TwoSidedPValue → 0.7304356793812,
 Fail to reject null hypothesis at significance level → 0.05}
```

- usando **LocationTest**

```
LocationTest[{muestra1, muestra2}, mu0, "TestDataTable",
 AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
T	0.349665	0.730436

- usando **TTest**

```
TTest[{muestra1, muestra2}, mu0, "TestDataTable",
 AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
T	0.349665	0.730436

- Se observa que $p-valor > \alpha = 0.05$ siendo, además, el $p-valor$ muy elevado; por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que las medias poblacionales son iguales $\mu_1 = \mu_2$

- c) σ_1, σ_2 desconocidas y desiguales
  - usando **MeanDifferenceTest**

```
MeanDifferenceTest[muestra1, muestra2, mu0, EqualVariances → False,
 FullReport → True, TwoSided → True, KnownVariance → None, SignificanceLevel → α]
```

```
{FullReport → MeanDiff    TestStat   Distribution
              0.0413636   0.35489    StudentTDistribution[18.2716],
 TwoSidedPValue → 0.7267353059788,
 Fail to reject null hypothesis at significance level → 0.05}
```

- Se observa que $p-valor > \alpha = 0.05$ siendo, además, el $p-valor$ muy elevado; por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que las medias poblacionales son iguales $\mu_1 = \mu_2$

Ejemplo

Se van a generar dos muestras aleatorias compuestas por diez observaciones extraídas de poblaciones normales: la primera $N(12, 1.7)$ y la segunda $N(11, 1.6)$. Se supone que son muestras pareadas. Se quiere contrastar, con un 95% de confianza, que la media de la primera población es mayor que la de la segunda.

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \leq 0 = \mu_0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > 0 = \mu_0 \end{cases}$

- definición de parámetros poblacionales

```
μA = 12; μB = 11; σA = 1.7; σB = 1.6;
```

- definición de las muestras

```
SeedRandom[1];
muestraA = RandomReal[NormalDistribution[μA, σA], 10];
muestraB = RandomReal[NormalDistribution[μB, σB], 10];
```

- definición y cálculo de valores

```
mu0 = 0;
α = 0.05; nA = Length[muestraA]; nB = Length[muestraB];
```

- usando **LocationTest**

```
LocationTest[{muestraA, muestraB}, mu0, "PairedT",
 AlternativeHypothesis → "Greater", SignificanceLevel → α]
```

0.0390921

- usando **PairedTTest**

```
PairedTTest[{muestraA, muestraB}, mu0, "TestDataTable",
 AlternativeHypothesis → "Greater", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
Paired T	1.98692	0.0390921

- realizando la diferencia de las muestras y usando **TTest**

```
TTest[muestraA - muestraB, mu0, "TestDataTable",
 AlternativeHypothesis → "Greater", SignificanceLevel → α]
```

	Statistic	P-Value
T	1.98692	0.0390921

- Se observa que $p-valor < \alpha = 0.05$; por lo tanto, hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se acepta la hipótesis alternativa: $\mu_1 > \mu_2$

Contraste para la varianza poblacional

Funciones del programa

El contraste puede realizarse calculando el valor del estadístico del contraste y analizando si pertenece a la región crítica para la toma de la decisión adecuada.

El programa *Mathematica* facilita las siguientes funciones:

- **VarianceTest[*list*,σ_0^2,*"property"*,*"test"*]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ para la varianza de una población. Se estima a partir de la muestra *list* formada por n elementos, extraída de la población. Por defecto, devuelve el p-valor del contraste. Necesita la carga del paquete HypothesisTesting`. Los argumentos y opciones más comunes son:
  - ***"property"***. Propiedades relacionadas con el informe requerido de los resultados del test; se incluyeron algunas de ellas en la descripción de **LocationTest**
  - ***"test"***. Muchos de los test usados requieren que los datos de la muestra (*list*) se distribuyan normalmente (si no es así se denominan *robustos*):

Test	*Supuestos*
"BrownForsythe"	Robusto
"Conover"	Simetría
"FisherRatio"	Normalidad
"Levene"	Robusto y simetría

- **AlternativeHypothesis→"Unequal"**. Por defecto, el contraste es bilateral con la hipótesis alternativa $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; indicando los valores **"Greater"** y **"Less"** se realizan contrastes unilaterales a la derecha ($H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$) y a la izquierda ($H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$), respectivamente.
- **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
- **VerifyTestAssumptions**. Verifica ciertos supuestos relativos a los datos para la realización del test: normalidad (**"Normality"**) o simetría alrededor de la mediana (**"Symmetry"**). Por defecto, su valor es **Automatic**.

- **FisherRatioTest[*list*,σ_0^2,*"property"*]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ para la varianza de una población. Se estima a partir de la muestra *list* formada por n elementos, extraída de la población. Por defecto, devuelve el p-valor del contraste. Requiere que los datos se distribuyan normalmente. Necesita la carga del paquete HypothesisTesting`. Los argumentos y opciones más comunes son:
  - ***"property"***. Propiedades relacionadas con el informe requerido de los resultados del test; se incluyeron algunas de ellas en la descripción de **LocationTest**
  - **AlternativeHypothesis→"Unequal"**. Por defecto, el contraste es bilateral con la hipótesis alternativa $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; indicando los valores **"Greater"** y **"Less"** se realizan contrastes unilaterales a la derecha ($H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$) y a la izquierda ($H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$), respectivamente.
  - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
  - **VerifyTestAssumptions**. Verifica el supuesto de normalidad (**"Normality"**) de los datos para la realización del test. Por defecto, su valor es **Automatic**.

Hipótesis del contraste

Hipótesis de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

Supuestos adicionales: población normal y μ desconocida

Estadístico del contraste: $EC = \dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$EC < \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \bigcup EC > \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$	$EC > \chi^2_{n-1;\alpha}$	$EC < \chi^2_{n-1;1-\alpha}$

Supuestos adicionales: población normal y μ conocida

Estadístico del contraste: $EC = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$EC < \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}} \bigcup EC > \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$	$EC > \chi^2_{n;\alpha}$	$EC < \chi^2_{n;1-\alpha}$

Ejemplo

El peso de los niños de seis meses sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Para analizar la varianza de los pesos de los niños en una región de un país se toma la siguiente muestra: $\{6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950\}$. Se quiere contrastar, al 90% de confianza, que la varianza de los pesos es $\sigma^2 = 1.2$ siendo: a) $\mu = 6.0\,kg$ y b) μ desconocida

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = 1.2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq 1.2 = \sigma_0^2 \end{cases}$

- definición de la muestra

```
muestra1 = {6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950};
```

- definición y cálculo de valores

```
α = 0.10; n1 = Length[muestra1];

m1 = Mean[muestra1]; S1 = StandardDeviation[muestra1];
```

- a) $\mu = 6.0\,kg$

  - definición de μ y σ_0^2

```
mu = 6.0; var0 = 1.2;
```

- valor del estadístico del contraste, ec

```
ec = Total[(muestra1 - mu)^2] / var0

0.791667
```

- determinación de la región crítica, RC

```
lim1 = Quantile[ChiSquareDistribution[n1], α / 2];

lim2 = Quantile[ChiSquareDistribution[n1], 1 - α / 2];

RC = {{0, lim1}, {lim2, Infinity}}

{{0, 4.57481}, {19.6751, ∞}}
```

- solución: $\boxed{ec \approx 0.791667 \in RC = \{(0, 4.57481) \bigcup (19.6751, \infty)\}}$

- Por lo tanto, hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se acepta la hipótesis alternativa: $\sigma^2 \neq 1.2$

- cálculo del $p - valor$

```
pvalor = ChiSquarePValue[ec, n1, TwoSided → True]

TwoSidedPValue → 0.0000304278

pvalor2 = 2 * Min[CDF[ChiSquareDistribution[n1], ec], 1 - CDF[ChiSquareDistribution[n1], ec]]

0.0000304278
```

- Un valor tan pequeño $\left(p - valor \approx 3.04\times10^{-5} < \alpha = 0.10\right)$ refuerza la decisión adoptada de rechazar la hipótesis nula

```
Grid[{{"Estadístico del contraste", ec},
  {"Región crítica", RC}, {"p-valor", N[pvalor2, 4]}}, Dividers → All]
```

Estadístico del contraste	0.791667
Región crítica	{{0, 4.57481}, {19.6751, ∞}}
p-valor	0.0000304278

- b) μ desconocida
  - usando **VarianceTest**

```
VarianceTest[muestra1, var0, AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → 1 - α]
```

0.00010852

  - usando **FisherRatioTest**

```
FisherRatioTest[muestra1, var0, AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → 1 - α]
```

0.00010852

  - Dado que $p - valor \approx 1.09 \times 10^{-4} < \alpha = 0.10$ existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se acepta la hipótesis alternativa: $\sigma^2 \neq 1.2$

Contraste para el cociente de dos varianzas poblacionales

Funciones del programa

El contraste puede realizarse calculando el valor del estadístico del contraste y analizando si pertenece a la región crítica para la toma de la decisión adecuada.

El programa *Mathematica* facilita las siguientes funciones:

- **VarianceEquivalenceTest[{*list1*,*list2*},σ_0^2,"*property*","*test*"]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ para el cociente de varianzas de dos poblaciones. Se estima a partir de las muestras *list1* y *list2* formadas por n_1 y n_2 elementos, respectivamente, extraídas de ambas poblaciones. Necesita la carga del paquete HypothesisTesting`. Devuelve el *p*-valor del contraste.Los argumentos y opciones más comunes son:
  - **"*property*"**. Propiedades relacionadas con el informe requerido de los resultados del test; se incluyeron algunas de ellas en la descripción de **LocationTest**
  - **"*test*"**. Muchos de los test usados requieren que los datos de la muestra (*list*) se distribuyan normalmente (si no es así se denominan *robustos*):

Test	*Supuestos*
"Bartlett"	Normalidad
"BrownForsythe"	Robusto
"Conover"	Simetría
"FisherRatio"	Normalidad
"Levene"	Robusto y simetría

  - **SignificanceLevel→α**. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
  - **VerifyTestAssumptions**. Verifica ciertos supuestos relativos a los datos para la realización del test: normalidad (**"Normality"**) o simetría alrededor de la mediana (**"Symmetry"**). Por defecto, su valor es **Automatic**.
- **VarianceRatioTest[*list1*,*list2*,*r*,"*property*"]**. Realiza un test con la hipótesis nula $H_0 : \sigma_1^2 = r \cdot \sigma_2^2$ para el cociente de varianzas de dos poblaciones. Se estima a partir de las

muestras *list1* y *list2* formadas por n_1 y n_2 elementos, respectivamente, extraídas de ambas poblaciones. Por defecto, devuelve el p-valor del contraste. Requiere que los datos se distribuyan normalmente. Necesita la carga del paquete `HypothesisTesting``. Admite las siguientes opciones:

- **FullReport→False**. Aporta un informe completo del test si se especifica el valor `True`; por defecto, el valor lógico asignado es `False`.
- **SignificanceLevel→**α. Nivel de significación del contraste; por defecto, $\alpha = 0.05$.
- **TwoSided→False**. Realiza un test bilateral si se especifica el valor `True`; por defecto, el valor lógico asignado es `False` (en este caso, el test es unilateral a la derecha).

También, pueden usarse las funciones descritas anteriormente: **VarianceTest** y **FisherRatioTest**. En ambos casos, las muestras recogidas se incluyen como elementos de una lista, **{*list1*, *list2*}**, en el primer argumento.

Hipótesis del contraste

Hipótesis de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$

Supuestos adicionales: poblaciones normales y μ_1 y μ_2 desconocidas

Estadístico del contraste: $EC = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$EC < F_{n_1-1, n_2-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \bigcup EC > F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}}$	$EC > F_{n_1-1, n_2-1; \alpha}$	$EC < F_{n_1-1, n_2-1; 1-\alpha}$

Supuestos adicionales: poblaciones normales y μ_1 y μ_2 conocidas

Estadístico del contraste: $EC = \dfrac{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2}{n_1}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2}{n_2}} \sim F_{n_1, n_2}$

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$EC < F_{n_1, n_2; 1-\frac{\alpha}{2}} \bigcup EC > F_{n_1, n_2; \frac{\alpha}{2}}$	$EC > F_{n_1, n_2; \alpha}$	$EC < F_{n_1, n_2; 1-\alpha}$

Ejemplo

El peso de los niños de seis meses sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Para analizar el cociente de varianzas de los pesos de los niños en dos regiones de un país se toman dos muestras independientes: {6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950} y {6.000, 5.650, 5.750, 5.950, 6.200, 6.250, 5.800, 5.950, 6.350, 6.050}. Se quiere contrastar, al 95% de confianza, la igualdad de varianzas de ambas poblaciones siendo: a) $\mu_1 = 6.000\ kg$, $\mu_2 = 5.850\ kg$, y b) μ_1, μ_2 desconocidas.

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

- definición de las muestras

```
muestra1 = {6.100, 5.450, 5.850, 6.550, 6.400, 6.250, 6.000, 5.950, 6.150, 5.750, 5.950};
muestra2 = {6.000, 5.650, 5.750, 5.950, 6.200, 6.250, 5.800, 5.950, 6.350, 6.050};
```

- definición y cálculo de valores

```
α = 0.05; n1 = Length[muestra1]; n2 = Length[muestra2];

m1 = Mean[muestra1]; S1 = StandardDeviation[muestra1];

m2 = Mean[muestra2]; S2 = StandardDeviation[muestra2];
```

- a) $\mu_1 = 6.000\,kg, \mu_2 = 5.850\,kg$
  - definición de μ_1, μ_2

```
mu1 = 6.000; mu2 = 5.850;
```

- valor del estadístico del contraste, ec

$$ec = \frac{\frac{\text{Total}[(\text{muestra1}-\text{mu1})^\wedge 2]}{\text{n1}}}{\frac{\text{Total}[(\text{muestra2}-\text{mu2})^\wedge 2]}{\text{n2}}}$$

```
1.29384
```

- determinación de la región crítica, RC

```
lim1 = Quantile[FRatioDistribution[n1, n2], α/2];

lim2 = Quantile[FRatioDistribution[n1, n2], 1 - α/2];

RC = {{0, lim1}, {lim2, Infinity}}
{{0, 0.283634}, {3.66491, ∞}}
```

- solución: $\boxed{ec \approx 1.29384 \notin RC = \{(0,\ 0.283634) \bigcup (3.66491,\ \infty)\}}$

- Por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

- cálculo del $p - valor$

```
pvalor = FRatioPValue[ec, n1, n2, TwoSided → True]
TwoSidedPValue → 0.692246

pvalor2 = 2 * Min[CDF[FRatioDistribution[n1, n2], ec], 1 - CDF[FRatioDistribution[n1, n2], ec]]
0.692245987319251
```

- Se tiene que $p - valor \approx 0.692246 > \alpha = 0.05$ con lo que no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula

```
Grid[{{"Estadístico del contraste", ec},
  {"Región crítica", RC}, {"p-valor", N[pvalor2, 4]}}, Dividers → All]
```

Estadístico del contraste	1.29384
Región crítica	{{0, 0.283634}, {3.66491, ∞}}
p-valor	0.6922

- b) μ_1, μ_2 desconocidas
  - usando VarianceEquivalenceTest

```
VarianceEquivalenceTest[{muestra1, muestra2}, "FisherRatio", SignificanceLevel → 0.05]
```

```
0.372347
```

  - usando VarianceTest

```
VarianceTest[{muestra1, muestra2}, 1,
 AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → 0.05]
```

```
0.372347
```

  - usando FisherRatioTest

```
FisherRatioTest[{muestra1, muestra2}, 1,
 AlternativeHypothesis → "Unequal", SignificanceLevel → 0.05]
```

```
0.372347
```

  - usando VarianceRatioTest

```
VarianceRatioTest[muestra1, muestra2, 1,
 FullReport → True, TwoSided → True, SignificanceLevel → 0.05]
```

```
{FullReport →  Ratio      TestStat   Distribution
               1.84124    1.84124    FRatioDistribution[10, 9] ,
 TwoSidedPValue → 0.372347, Fail to reject null hypothesis at significance level → 0.05}
```

  - Se observa que $p-valor > \alpha = 0.05$ siendo, además, el $p-valor$ muy elevado; por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que las varianzas poblacionales son iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Contraste para una proporción poblacional

Supuestos adicionales: población binomial y muestra grande ($n > 100$)

Hipótesis que pueden plantearse, siendo p la proporción de individuos de una población que presentan una determinada característica (etiquetada como *éxito*):

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p \neq p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p > p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p < p_0 \end{cases}$

Estadístico del contraste: $\hat{p} \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$

En este caso, $\hat{p} = \frac{x}{n}$ donde x denota el número de éxitos en una muestra aleatoria simple de tamaño, n.

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\lvert \hat{p} - p_0 \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} - p_0 > z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} - p_0 < -z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}$

Ejemplo

Un taller utiliza un modelo de máquina en la fabricación de una determinada pieza para un proceso productivo. Esa pieza debe tener unas medidas que cumplan ciertas especificaciones para resultar válidas. El fabricante de la máquina asegura que el porcentaje de piezas que no cumplen con las especificaciones no supera el 3%. El responsable del taller no está seguro de tal afirmación y quiere contrastarla con una confianza del 95%. Para ello, se recoge una muestra aleatoria simple formada por 285 piezas de las que trece no resultan válidas. ¿Cuál es la mínima significación con la que se podría rechazar la afirmación del fabricante?

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & p \leq 0.03 = p_0 \\ H_1: & p > 0.03 = p_0 \end{cases}$

- nivel de significación, número de piezas no válidas (éxitos) en la muestra y tamaño muestral

```
α = 0.05; exitos = 13; n = 285;
```

- valor del estadístico del contraste, ec , (proporción de éxitos en la muestra)

```
ec = N[exitos / n, 4]
0.04561
```

- determinación de la región crítica, RC

```
p0 = 0.03;

zα = Quantile[NormalDistribution[0, 1], 1 - α]
1.64485

lim = p0 + zα * Sqrt[p0 (1 - p0) / n]
0.0466208

RC = {{lim, Infinity}}
{{0.0466208, ∞}}
```

- solución: $\boxed{ec \approx 0.04561 \notin RC = \{(0.0466208, \infty)\}}$

- Por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que la afirmación del fabricante es correcta: $p \leq 0.03$

- cálculo del $p - valor$

```
pvalor = NormalPValue[(ec - p0) / Sqrt[p0 (1 - p0) / n], TwoSided → False]
OneSidedPValue → 0.0611462

pvalor2 = 1 - CDF[NormalDistribution[p0, Sqrt[p0 (1 - p0) / n]], ec]
0.0611462
```

- Entonces, $p-valor \approx 0.0611462$ es el mínimo nivel de significación que permitiría rechazar la hipótesis nula

```
1 - pvalor2
```

```
0.938854
```

- En ese caso, la confianza sería $1-\alpha \approx 0.938854$

```
Grid[{{"Estadístico del contraste", ec},
  {"Región crítica", RC}, {"p-valor", N[pvalor2, 4]}}, Dividers → All]
```

Estadístico del contraste	0.04561
Región crítica	{{0.0466208, ∞}}
p-valor	0.0611462

Contraste para la diferencia de dos proporciones poblacionales

Supuestos adicionales: poblaciones binomiales y muestras grandes $(n_1, n_2 > 100)$

Hipótesis que pueden plantearse, siendo p_1 y p_2 las proporciones de individuos de las dos poblaciones que presentan una determinada característica (etiquetada como *éxito*):

Bilateral	*Unilateral derecha*	*Unilateral izquierda*
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 \neq p_2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 > p_2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 < p_2 \end{cases}$

Estadístico del contraste: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(0, \sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)$

En este caso, $\hat{p}_1 = \frac{x}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \frac{y}{n_2}$ y $\hat{p} = \frac{x+y}{n_1+n_2}$ donde x e y denotan el número de éxitos en cada muestra aleatoria simple (una de cada población) de tamaños n_1 y n_2, respectivamente.

Región crítica de los diferentes contrastes:

Bilateral
$\lvert \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

Unilateral derecha	*Unilateral izquierda*
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > z_{\alpha} \cdot \sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < -z_{\alpha} \cdot \sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

Ejemplo

Un taller utiliza dos modelos diferentes de máquina en la fabricación de una determinada pieza para un proceso productivo. Esa pieza debe tener unas medidas que cumplan ciertas especificaciones para resultar válidas. Según los fabricantes el porcentaje de piezas que no cumplen con las especificaciones es el mismo en ambas máquinas. El responsable del taller quiere contrastar esa afirmación con una confianza del 90%. Para ello, se recoge una muestra aleatoria simple formada por 285 piezas fabricadas por el primer modelo de las que trece no resultan válidas. De las fabricadas por el segundo modelo de máquina se obtiene una muestra de 233 piezas de las que once resultan defectuosas.

- carga del paquete necesario para las funciones estadísticas de contraste de hipótesis

```
Needs["HypothesisTesting`"]
```

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 \neq p_2 \end{cases}$

- nivel de significación y tamaños muestrales

```
α = 0.10; n1 = 285; n2 = 233;
```

- número de piezas no válidas (éxitos) en cada muestra

```
exitos1 = 13; exitos2 = 11;
```

- proporción de éxitos en cada muestra

```
p̂1 = exitos1 / n1; p̂2 = exitos2 / n2;
p̂ = (exitos1 + exitos2) / (n1 + n2);
```

- valor del estadístico del contraste, ec

```
ec = N[p̂1 - p̂2, 4]
-0.001596
```

- determinación de la región crítica, RC

```
z_{α/2} = Quantile[NormalDistribution[0, 1], 1 - α / 2];
lim1 = -z_{α/2} * Sqrt[p̂ * (1 - p̂) * (1/n1 + 1/n2)];
lim2 = +z_{α/2} * Sqrt[p̂ * (1 - p̂) * (1/n1 + 1/n2)];
RC = {{-Infinity, lim1}, {lim2, Infinity}}
{{-∞, -0.0305373}, {0.0305373, ∞}}
```

- solución: $\boxed{ec \approx -0.001596 \notin RC = \{(-\infty, -0.0305373), (0.0305373, \infty)\}}$
- Por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula con lo que se asume que la afirmación es correcta y las proporciones son iguales: $p_1 = p_2$
- cálculo del $p-valor$

```
pvalor = NormalPValue[ec / Sqrt[p̂ * (1 - p̂) * (1/n1 + 1/n2)], TwoSided → True]
TwoSidedPValue → 0.9315

pvalor2 = 2 * Min[CDF[NormalDistribution[0, Sqrt[p̂ * (1 - p̂) * (1/n1 + 1/n2)]], ec],
   1 - CDF[NormalDistribution[0, Sqrt[p̂ * (1 - p̂) * (1/n1 + 1/n2)]], ec]]
0.9315
```

- Se tiene que $p-valor \approx 0.9315 > \alpha = 0.10$ siendo, además, el $p-valor$ muy elevado; por lo tanto, no hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula