

Material de estudio

OCW 2019: *Curso práctico para el análisis e inferencia estadística con Mathematica*

Tema 6. Variable aleatoria continua

Equipo docente del curso

Arrospide Zabala, Eneko
Martín Yagüe, Luis
Unzueta Inchaurre, Aitziber
Soto Merino, Juan Carlos
Durana Apaolaza, Gaizka
Bikandi Irazabal, Iñaki

TEMA 6. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Introducción

Definición

Se considera un experimento aleatorio en cuyo espacio muestral, Ω , está definida una función de probabilidad, P .

Una variable aleatoria, X , es una función que hace corresponder un número real a cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral Ω .

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Dominio

Una variable aleatoria es continua cuando el conjunto de todos los valores que puede tomar no es numerable; es decir, puede tomar cualquier valor en uno o varios intervalos de la recta real.

Distribución de probabilidad continua

Función de densidad de probabilidad

Dada una variable aleatoria continua, X , se define su función de densidad de probabilidad como aquella función $f(x)$ tal que:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ó } a, b = \pm\infty$$

Una función de densidad $f(x)$ verifica las siguientes condiciones:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Es decir, la función toma valores positivos o nulos en toda la recta real y, además, el área comprendida entre su gráfica y el eje de abscisas es uno (la probabilidad total).

- **ProbabilityDistribution[*pdf*, {*x*, *x_{min}*, *x_{max}*, *dx*}]**. Representa la distribución de probabilidad de la variable continua x , que toma valores entre x_{min} y x_{max} , con una función de densidad *pdf*. La función *pdf* toma el valor cero para $x < x_{min}$ y $x > x_{max}$.
- **PDF[*dist*, *x*]**. Da la función de densidad de probabilidad de una variable x que sigue una distribución de probabilidad *dist*.

Función de distribución de probabilidad

Dada una variable aleatoria continua, X , se define su función de distribución de probabilidad como aquella función tal que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es la función que asocia a cada valor real x la probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome valores menores o iguales que x .

Si $F(x)$ es la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua entonces su función de densidad, $f(x)$, es : $F'(x) = f(x)$

- **CDF[dist,x]**. Da la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua x que sigue una distribución de probabilidad $dist$.

Siendo $a < b$: $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

- **Probability[pred,x~dist]**. Da la probabilidad de un suceso que satisface el predicado $pred$ en el supuesto de que la variable aleatoria x siga una distribución de probabilidad $dist$.
- **Distributed[x,dist]**. También, $x \sim dist$. Indica que la variable aleatoria x sigue una distribución de probabilidad $dist$.
- **Conditioned[expr,cond]**. También, $expr \mid cond$. Representa una expresión $expr$ condicionada por el predicado $cond$.

Nota. Se recomienda copiar los símbolos $\sim$ y $\mid$ de la Ayuda del programa. Se indican alias para su obtención por teclado: <Esc>+dist+<Esc> ($\sim$) y <Esc>+cond+<Esc> ($\mid$).

Valor esperado

El valor esperado de una variable aleatoria continua X es una media ponderada de los posibles valores de X en la que el peso de un valor determinado coincide con la función de densidad de X evaluada en ese valor.

Por tanto, se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

- **Mean[dist]**. Da la media de la distribución de probabilidad $dist$.
- **Expectation[expr,x~dist]**. Da el valor esperado de $expr$ en el supuesto de que la variable aleatoria x siga una distribución de probabilidad $dist$.
- **Moment[dist,1]**. Da el primer momento central de la distribución de probabilidad $dist$.

Varianza

La varianza de una variable aleatoria continua X es el valor esperado del cuadrado de las desviaciones respecto de la media de X .

Se define como:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

- **Variance[dist]**. Da la varianza de la distribución de probabilidad $dist$.
- **CentralMoment[dist,2]**. Da el segundo momento central de la distribución de probabilidad $dist$.

Cuantiles

- **Median[dist]**. Da la mediana de la distribución de probabilidad $dist$.
- **Quantile[dist,q]**. Da un cuantil de la distribución de probabilidad $dist$.
- **CDF[dist,x]**. Da la función de distribución acumulada de una distribución de probabilidad $dist$ evaluada para el valor x .

Forma y simetría

- **Skewness[dist]**. Da el coeficiente de asimetría de la distribución de probabilidad *dist*.
- **Kurtosis[dist]**. Da el coeficiente de apuntamiento de la distribución de probabilidad *dist*.

Ejemplo

Se considera una variable aleatoria continua X cuya función de densidad viene dada por la función:

$$\begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

- función de densidad de probabilidad

f[x_] = 6 x (1 - x);

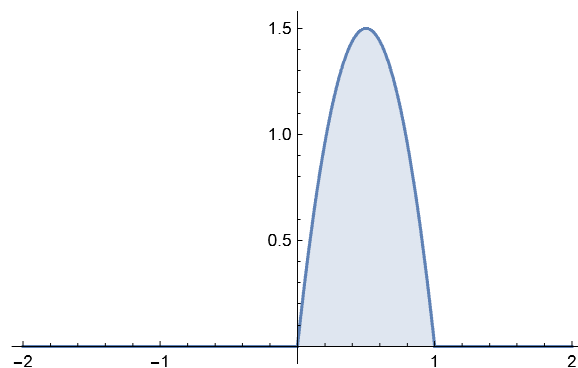
dist = ProbabilityDistribution[f[x], {x, 0, 1}];

PDF[dist, x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 6(1-x)x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de densidad

Plot[PDF[dist, x], {x, -2, 2}, Filling -> Axis]



- comprobación de la función de densidad

Integrate[f[x], {x, 0, 1}]

1

- función de distribución acumulada

CDF[dist, x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

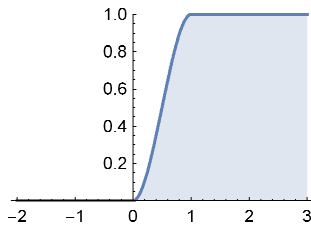
- integrando la función de densidad

Integrate[PDF[dist, x], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{True} \end{cases}$$

■ representación gráfica

`Plot[CDF[dist, x], {x, -2, 3}, Filling -> Axis, PlotRange -> {0, 1}]`



■ cálculo de probabilidades

■ $P(x \leq 0.5)$

`CDF[dist, 0.5]`

0.5

■ $P(x \leq 1)$

`CDF[dist, 1]`

1

■ $P(x > 0.3) = 1 - P(x \leq 0.3)$

`1 - CDF[dist, 0.3]`

0.784

■ $P(0.3 \leq x < 0.7)$

`Probability[0.3 ≤ x < 0.7, x ≈ dist]`

0.568

■ $P(0.5 < x < 1)$

`Probability[0.5 < x < 1.0, x ≈ dist]`

0.5

■ $P(x > 0.5 | x < 0.8)$

`Probability[Conditioned[x > 0.5, x < 0.8], x ≈ dist]`

0.441964

`Probability[x > 0.5 & x < 0.8, x ≈ dist]`

0.441964

■
$$P(x > 0.5 | x < 0.8) = \frac{P(x > 0.5 \cap x < 0.8)}{P(x < 0.8)} = \frac{P(0.5 < x < 0.8)}{P(x < 0.8)}$$

`Probability[0.5 < x < 0.8, x ≈ dist] / Probability[x < 0.8, x ≈ dist]`

0.441964

■ valor esperado

`{Mean[dist], Expectation[x, x ≈ dist], Moment[dist, 1]}`

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

■ varianza

`{Variance[dist], Expectation[(x - Mean[dist])^2, x <~ dist], CentralMoment[dist, 2]}`

$$\left\{ \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20} \right\}$$

■ cuantiles

■ mediana

`Median[dist]`

$$\frac{1}{2}$$

■ cuartiles

`Quantile[dist, {0.25, 0.50, 0.75}]`

`{0.326352, 0.5, 0.673648}`

■ percentil 30

`Quantile[dist, 0.30]`

`0.363257`

■ moda

`Solve[f'[x] == 0, x]`

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

■ simetría y forma

`Skewness[dist] // N (* simétrica *)`

`0.`

`Kurtosis[dist] // N (*distribución platicúrtica*)`

`2.14286`

Modelos de distribución de probabilidad

Introducción

Para determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria basta con conocer la función de densidad. Esto, a priori, no siempre es posible.

Se presentan una serie de modelos teóricos de distribución de probabilidad cuyas funciones de densidad pueden resultar adecuadas para determinadas variables aleatorias continuas.

Uniforme continua

Una variable aleatoria X sigue una distribución uniforme continua en el intervalo $[x_{min}, x_{max}]$ si está distribuida de forma uniforme en dicho intervalo. Es decir, la variable puede tomar cualquier valor dentro del intervalo, todos ellos con la misma densidad.

Notación: $X \sim UC[x_{min}, x_{max}]$

- **UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}]**. Representa una distribución uniforme continua definida entre los valores x_{min} y x_{max}.

- función de masa de probabilidad

PDF[UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} & x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- función de distribución acumulada

CDF[UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \\ 1 & x > x_{\max} \end{cases}$$

- valor esperado

Mean[UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}]] // TraditionalForm

$$\frac{1}{2} (x_{\max} + x_{\min})$$

Expectation[x, x ≈ UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}]] // TraditionalForm

$$\frac{1}{2} (x_{\max} + x_{\min})$$

- median

Median[UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}]] // TraditionalForm

$$\frac{1}{2} (x_{\max} + x_{\min})$$

- varianza

Variance[UniformDistribution[{x_{min}, x_{max}}]] // TraditionalForm

$$\frac{1}{12} (x_{\max} - x_{\min})^2$$

Ejemplo. El precio medio del litro de gasóleo A en una determinada gasolinera durante el próximo mes se estima que puede oscilar, uniformemente, entre 1.35€ y 1.45€.

- variable aleatoria X : "precio, en euros, del gasóleo A el próximo mes"
- espacio muestral: $\Omega = [1.35, 1.45]$
- función de densidad de probabilidad

distUC = UniformDistribution[{1.35, 1.45}];

PDF[distUC, x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 10. & 1.35 \leq x \leq 1.45 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- función de distribución acumulada

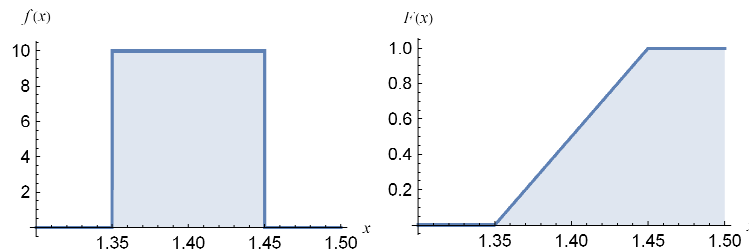
CDF[distUC, x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 10. (x - 1.35) & 1.35 \leq x \leq 1.45 \\ 1 & x > 1.45 \end{cases}$$

- representación gráfica

Grid[

```
{ {
  Plot[Table[PDF[UniformDistribution[{min, max}], x], {min, {1.35}}, {max, {1.45}}], {x, 1.3, 1.5}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}],
  Plot[Table[CDF[UniformDistribution[{min, max}], x], {min, {1.35}}, {max, {1.45}}], {x, 1.3, 1.5}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]] }
```



- cálculo de probabilidades

- $P(X \leq 1.41)$

CDF[distUC, 1.41]

0.6

- $P(X > 1.41)$

1 - CDF[distUC, 1.41]

0.4

Normal

También llamada de Gauss o gaussiana. Es el modelo de distribución más importante porque es el que aparece con más frecuencia en fenómenos reales. Su importancia radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. La gráfica de su función de densidad es la campana de Gauss.

Muchas variables aleatorias presentan funciones de densidad cuya gráfica tiene forma de campana; se debe a que hay muchas variables asociadas con fenómenos naturales y reales cuyas características son compatibles con el modelo aleatorio normal. En general, cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores independientes halla en la distribución normal un modelo adecuado.

Una variable aleatoria continua X que puede tomar cualquier valor $x \in \mathbb{R}$ sigue una distribución normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

El modelo de distribución normal tiene dos parámetros: la media $\mu \in \mathbb{R}$ y la desviación típica $\sigma > 0$.

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma)$

- **NormalDistribution[μ, σ]**. Representa una distribución normal con media μ y desviación típica σ .
- **NormalDistribution[]**. Representa una distribución normal con media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$ (estándar).

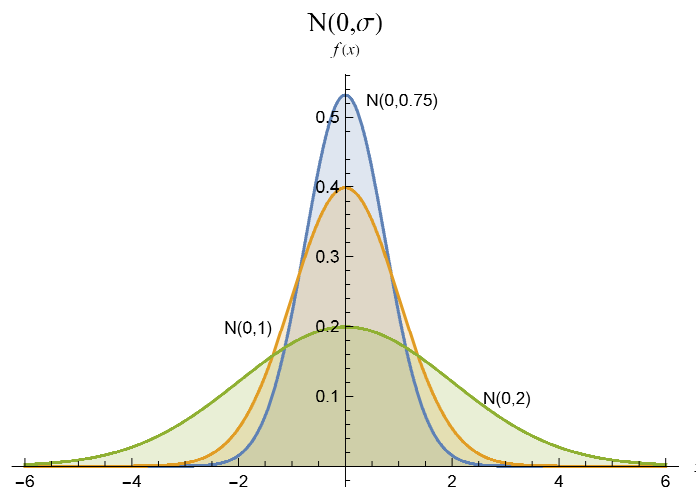
- función de densidad de probabilidad

PDF[NormalDistribution[μ , σ], x] // TraditionalForm

$$\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

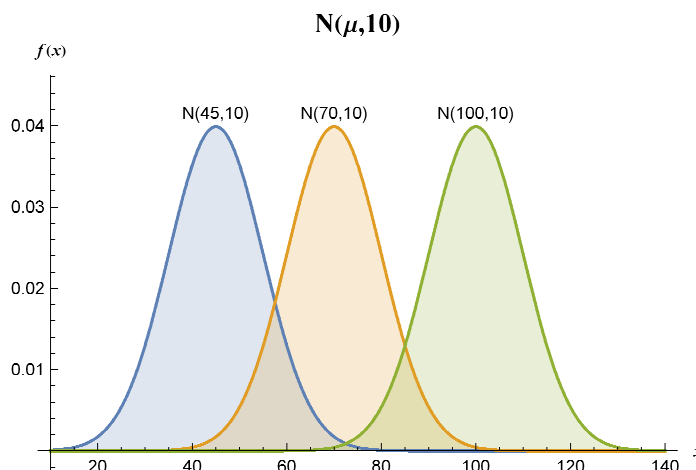
- representación gráfica de la función de densidad para $\mu = 0$ y diferentes valores de σ

```
Plot[Table[PDF[NormalDistribution[0, σ], x], {σ, {.75, 1, 2}}] // Evaluate,
{x, -6, 6}, PlotLabels → Placed[{"N(0,0.75)", "N(0,1)", "N(0,2)"},
{{Scaled[0.51], Right}, {Scaled[0.4], Left}, {Scaled[0.7], Right}}],
Filling → Axis, PlotLabel → "N(0,σ)", AxesLabel → {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]
```



- representación gráfica de la función de densidad para $\sigma = 10$ y diferentes valores de μ

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[NormalDistribution[μ, 10], x], {μ, {45, 70, 100}}],
{x, 10, 140}, Filling → Axis, PlotRange → Full, PlotLabel → "N(μ,10)",
PlotLabels → Placed[{"N(45,10)", "N(70,10)", "N(100,10)"}, Above],
AxesLabel → {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]
```



- función de distribución de probabilidad

No se puede calcular una primitiva de la función de densidad mediante métodos elementales; sólo puede aproximarse mediante métodos numéricos.

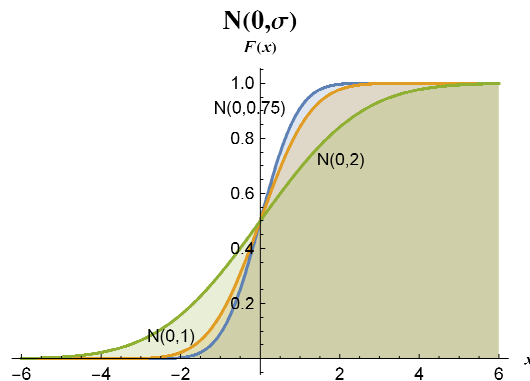
CDF[NormalDistribution[μ , σ], x]

$$\frac{1}{2} \operatorname{Erfc}\left[\frac{-x + \mu}{\sqrt{2} \sigma}\right]$$

■ **Erfc[z]**. Da la función de error complementario.

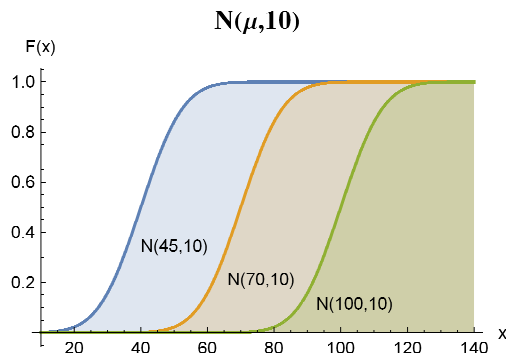
■ representación gráfica de la función de distribución para $\mu = 0$ y diferentes valores de σ

```
Plot[Table[CDF[NormalDistribution[0,  $\sigma$ ], x], { $\sigma$ , {.75, 1, 2}}] // Evaluate,
{x, -6, 6}, PlotLabels -> Placed[{"N(0,0.75)", "N(0,1)", "N(0,2)"},
{{Scaled[0.59], Left}, {Scaled[0.38], Left}, {Scaled[0.6], Right}}],
Filling -> Axis, PlotLabel -> "N(0, $\sigma$ )", AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]
```



■ representación gráfica de la función de distribución para $\sigma = 10$ y diferentes valores de μ

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[NormalDistribution[ $\mu$ , 10], x], { $\mu$ , {40, 70, 100}}],
{x, 10, 140}, Filling -> Axis, PlotRange -> Full, PlotLabel -> "N( $\mu$ ,10)",
PlotLabels -> Placed[{"N(45,10)", "N(70,10)", "N(100,10)"},
{{Scaled[0.2], Right}, {Scaled[0.4], Right}, {Scaled[0.6], Right}}],
AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]
```



■ valor esperado

Mean[NormalDistribution[μ , σ]] // TraditionalForm

μ

Expectation[x, x $\approx$ NormalDistribution[μ , σ]] // TraditionalForm

μ

■ mediana

Median[NormalDistribution[μ , σ]] // TraditionalForm

μ

■ moda

```
fn[x_] = PDF[NormalDistribution[μ, σ], x]; Reduce[fn'[x] == 0, x]
```

$\sigma \neq 0 \ \&\& \ x = \mu$

■ varianza

```
Variance[NormalDistribution[μ, σ]] // TraditionalForm
```

σ^2

■ cuartiles

```
Quantile[NormalDistribution[μ, σ], {0.25, 0.50, 0.75}]
```

$\{\mu - 0.67449 \sigma, 0. + \mu, \mu + 0.67449 \sigma\}$

Ejemplo. El peso, medido en kilogramos, de los niños de tres meses se sabe que sigue una distribución normal de $\mu = 6$ y $\sigma = 1.2$.

■ variable aleatoria X : "peso, en kg, de niños de 3 meses"

■ notación: $X \sim N(6, 1.2)$

■ función de densidad de probabilidad

```
distN = NormalDistribution[6, 1.2];
```

```
PDF[distN, x] // TraditionalForm
```

$0.332452 e^{-0.347222(x-6)^2}$

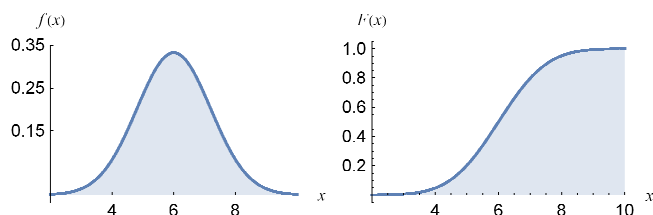
■ función de distribución de probabilidad

```
CDF[distN, x] // TraditionalForm
```

$\frac{1}{2} - \text{erfc}(0.589256(6-x))$

■ representación gráfica

```
Grid[{{
  Plot[PDF[NormalDistribution[6, 1.2], x], {x, 2.0, 10.0}, Filling -> Axis, PlotRange -> All,
    Ticks -> {{4, 6, 8}, {0.15, 0.25, 0.35}}, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}],
  Plot[CDF[NormalDistribution[6, 1.2], x], {x, 2.0, 10.0}, Filling -> Axis,
    PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]}]}
```



■ cálculo de probabilidades y cuantiles

```
mu = 6; sig = 1.2;
```

■ $P(|X - \mu| \leq 3\sigma)$: proporción de valores de la distribución que se encuentran a menos de tres desviaciones típicas de la media

```
Probability[mu - 3*sig ≤ x ≤ mu + 3*sig, x ≈ distN]
```

0.9973

- $P(|X - \mu| \leq 2\sigma)$: proporción de valores de la distribución que se encuentran a menos de dos desviaciones típicas de la media

Probability[$\mu - 2 * \text{sig} \leq x \leq \mu + 2 * \text{sig}$, $x \approx \text{distN}$]

0.9545

- $P(X < 3.650)$

CDF[**distN**, 3.650] // N

0.0250955

- $P(X \geq 7.100)$

1 - CDF[**distN**, 7.100] // N

0.179659

- Percentil 35

Quantile[**distN**, 0.35]

5.53762

Exponencial

Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores $x \geq 0$ sigue una distribución exponencial de parámetro λ si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Suele ser modelo de aquellos fenómenos aleatorios que miden el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos sucesos por lo que se encuentra relacionado con el modelo de distribución de Poisson.

También, se emplea para modelar la distribución de la vida útil de determinados componentes.

Notación: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

- **ExponentialDistribution**[λ]. Representa una distribución exponencial con una escala inversamente proporcional al parámetro λ .

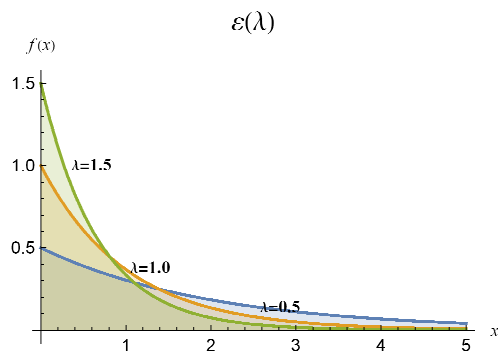
- función de densidad de probabilidad

PDF[**ExponentialDistribution**[λ], x] // **TraditionalForm**

$$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de densidad para diferentes valores de λ

Plot[**Table**[**PDF**[**ExponentialDistribution**[λ], x], { λ , {0.5, 1, 1.5}}] // **Evaluate**,
 { x , 0, 5}, **Filling** → **Axis**, **PlotRange** → **All**, **PlotLabel** → " $\mathcal{E}(\lambda)$ ",
PlotLabels → **Placed**[{" $\lambda=0.5$ ", " $\lambda=1.0$ ", " $\lambda=1.5$ "},
 {{**Scaled**[0.5], **Right**}, {**Scaled**[0.22], **Right**}, {**Scaled**[0.1], **Right**}],
AxesLabel → {**HoldForm**[" x "], **HoldForm**[" $f(x)$ "]}]



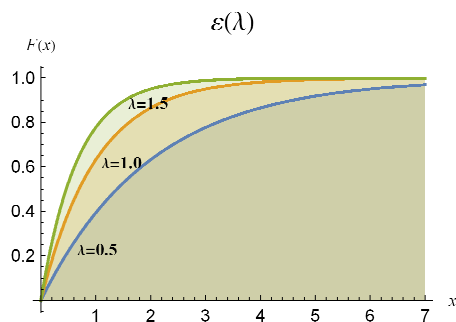
- función de distribución de probabilidad

`CDF[ExponentialDistribution[λ], x] // TraditionalForm`

$$\begin{cases} 1 - e^{\lambda(-x)} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de distribución para diferentes valores de λ

`Plot[Table[CDF[ExponentialDistribution[λ], x], {λ, {0.5, 1, 1.5}}] // Evaluate,
{x, 0, 7}, Filling → Axis, PlotRange → All, PlotLabel → "ε(λ)",
PlotLabels → Placed[{"λ=0.5", "λ=1.0", "λ=1.5"}, {{Scaled[0.08], Right}, {Scaled[0.16], Right},
{Scaled[0.24], Right}}], AxesLabel → {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]`



- valor esperado

`Mean[ExponentialDistribution[λ]] // TraditionalForm`

$$\frac{1}{\lambda}$$

`Expectation[x, x ≈ ExponentialDistribution[λ]] // TraditionalForm`

$$\frac{1}{\lambda}$$

- mediana

`Median[ExponentialDistribution[λ]] // TraditionalForm`

$$\frac{\log(2)}{\lambda}$$

- moda

`fe[x_] = PDF[ExponentialDistribution[λ], x]; Reduce[fe'[x] == 0, x]`

`(λ == 0 && x > 0) || x < 0`

- varianza

Variance[**ExponentialDistribution** [λ]] // **TraditionalForm**

$$\frac{1}{\lambda^2}$$

Ejemplo. El tiempo que transcurre entre la recepción de dos correos electrónicos en una determinada dirección sigue una distribución exponencial con un promedio de 10 minutos.

- variable aleatoria X : "tiempo, en minutos, que transcurre entre la recepción de dos correos"
- cálculo del parámetro λ

NSolve[**Mean**[**ExponentialDistribution** [λ]] == 10, λ]

{ { $\lambda \rightarrow 0.1$ } }

- notación: $X \sim \varepsilon(0.1)$
- función de densidad de probabilidad

distE = **ExponentialDistribution** [0.1];

PDF[**distE**, x] // **TraditionalForm**

$$\begin{cases} 0.1 e^{-0.1x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- función de distribución de probabilidad

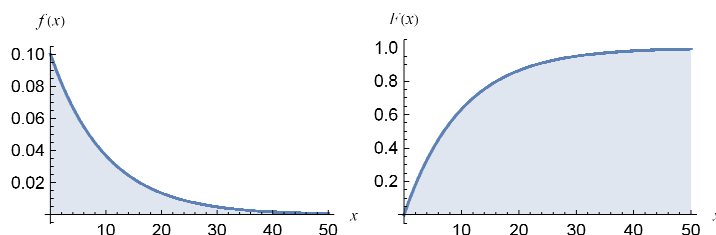
CDF[**distE**, x] // **TraditionalForm**

$$\begin{cases} 1 - e^{-0.1x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica

Grid[

```
{ {
  Plot[PDF[ExponentialDistribution[0.1], x], {x, 0, 50},
    Filling -> Axis, PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}],
  Plot[CDF[ExponentialDistribution[0.1], x], {x, 0, 50}, Filling -> Axis,
    PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]} ] ] }
```



- cálculo de probabilidades y cuantiles

- $P(X \leq E[X])$

CDF[**distE**, 10] // **N**

0.632121

- $P(X > 20)$

1 - CDF[**distE**, 20] // **N**

0.135335

- Percentil 35

`Quantile[distE, 0.35]`

4.30783

- $P(X > 15 \mid X > 9)$: propiedad de la falta de memoria de la exponencial

`Probability[x > 15 | x > 9, x ~ distE] == Probability[x > (15 - 9), x ~ distE]`

True

`Probability[x > 15 | x > 9, x ~ distE]`

0.548812

`1 - CDF[distE, 6] // N`

0.548812

Gamma

Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores $x \geq 0$ sigue una distribución gamma de parámetros k y λ ($k > 0$, $\lambda > 0$) si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Los parámetros k y λ se denominan "de forma" y "de escala", respectivamente.

Casos particulares de esta distribución son:

- distribución exponencial (si $k = 1$)
- distribución de Erlang (si $k = n \in \mathbb{N}$) que se usa, por ejemplo, como modelo del tiempo que pasa entre la ocurrencia de n sucesos
- distribución ji cuadrado con r grados de libertad (si $k = \frac{r}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$) que se usa, por ejemplo, para evaluar la bondad del ajuste de una distribución teórica a unos datos

Notación: $X \sim \Gamma(k, \lambda)$ o $X \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$

- `GammaDistribution[k,  $\beta$ ]`. Representa una distribución gamma con parámetro de forma k y parámetro de escala $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

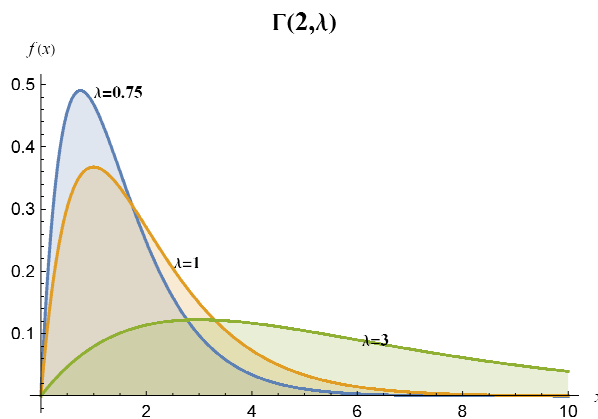
- función de densidad de probabilidad

`PDF[GammaDistribution[k,  $\lambda$ ], x] // TraditionalForm`

$$\begin{cases} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de densidad para $k = 2$ y diferentes valores de λ

`Plot[Table[PDF[GammaDistribution[2, λ], x], { λ , {0.75, 1, 3}}] // Evaluate,
 {x, 0, 10}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> "Gamma(2, λ)",
 PlotLabels -> Placed[{" $\lambda=0.75$ ", " $\lambda=1$ ", " $\lambda=3$ "},
 {{Scaled[0.1], Right}, {Scaled[0.25], Right}, {Scaled[0.6], Right}}],
 AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]`

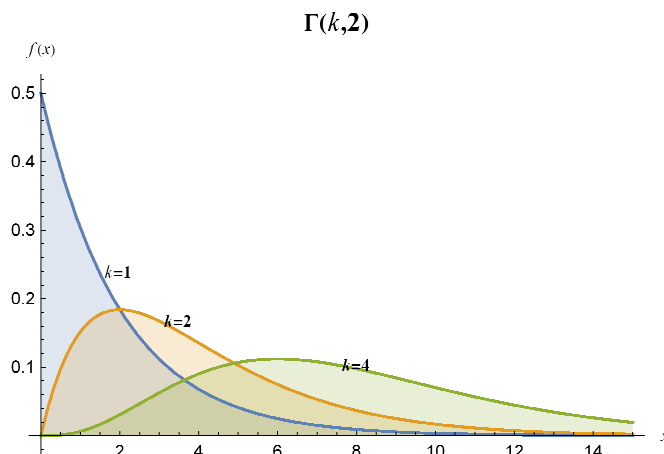


- representación gráfica de la función de densidad para $\lambda = 2$ y diferentes valores de k

```

Plot[Table[PDF[GammaDistribution[k, 2], x], {k, {1, 2, 4}}] // Evaluate, {x, 0, 15},
  Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> "Γ(k,2)", PlotLabels -> Placed[{"k=1", "k=2", "k=4"},
    {{Scaled[0.1], Right}, {Scaled[0.2], Right}, {Scaled[0.5], Right}}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}

```



- función de distribución de probabilidad

```

CDF[GammaDistribution[k, λ], x] // TraditionalForm

```

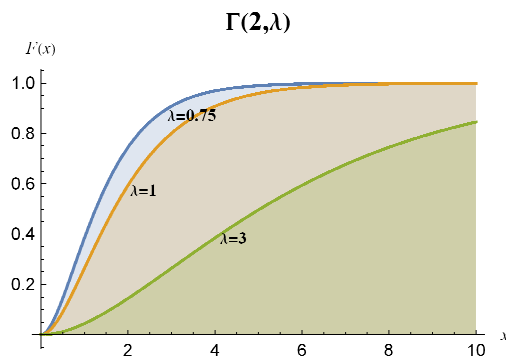
$$\begin{cases} Q(k, 0, \frac{x}{\lambda}) & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de distribución para $k = 2$ y diferentes valores de λ

```

Plot[Table[CDF[GammaDistribution[2, λ], x], {λ, {0.75, 1, 3}}] // Evaluate,
  {x, 0, 10}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> "Γ(2,λ)",
  PlotLabels -> Placed[{"λ=0.75", "λ=1", "λ=3"},
    {{Scaled[0.28], Right}, {Scaled[0.2], Right}, {Scaled[0.4], Right}}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}

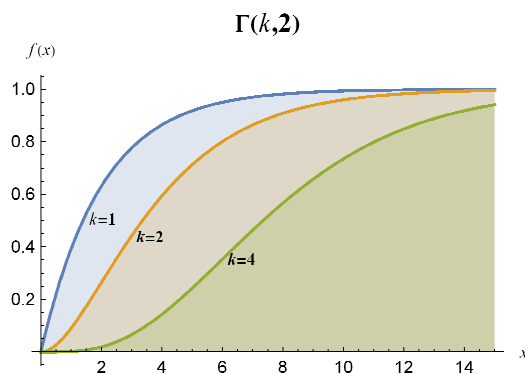
```



- representación gráfica de la función de distribución para $\lambda = 2$ y diferentes valores de k

```

Plot[Table[CDF[GammaDistribution[k, 2], x], {k, {1, 2, 4}}] // Evaluate, {x, 0, 15},
  Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> "Γ(k,2)", PlotLabels -> Placed[{"k=1", "k=2", "k=4"},
    {{Scaled[0.1], Right}, {Scaled[0.2], Right}, {Scaled[0.4], Right}}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}
  
```



- valor esperado

```
Mean[GammaDistribution[k, β]] // TraditionalForm
```

βk

```
Expectation[x, x ≈ GammaDistribution[k, β]] // TraditionalForm
```

βk

- varianza

```
Variance[GammaDistribution[k, β]] // TraditionalForm
```

$\beta^2 k$

Ejemplo. El número de correos electrónicos recibidos en una determinada dirección sigue una distribución de Poisson con un promedio de 4 correos a la hora. El tiempo hasta la recepción de tres correos sigue una distribución gamma.

- variable aleatoria X : "número de correos que llegan a la hora a la dirección"
- variable aleatoria T : "tiempo, en horas, que transcurre hasta la recepción de tres correos"
- notación: $T \sim \Gamma\left(3, \frac{1}{4}\right)$
- función de densidad de probabilidad

```
distG = GammaDistribution[3, 1/4];
```

`PDF[distG, t] // TraditionalForm`

$$\begin{cases} 32 e^{-4t} t^2 & t > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

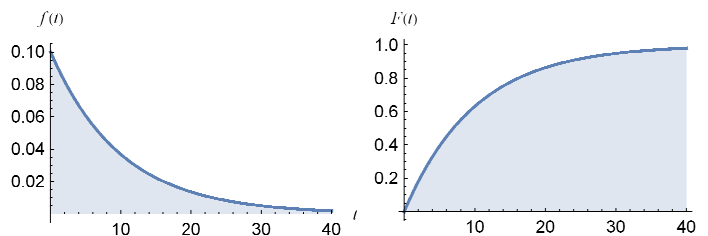
- función de distribución de probabilidad

`CDF[distG, t] // TraditionalForm`

$$\begin{cases} Q(3, 0, 4t) & t > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica

```
Grid[{{
  Plot[PDF[ExponentialDistribution[0.1], x], {x, 0, 40},
    Filling -> Axis, PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["t"], HoldForm["f(t)"]}],
  Plot[CDF[ExponentialDistribution[0.1], x], {x, 0, 40}, Filling -> Axis,
    PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["t"], HoldForm["F(t)"]}]}]}
```



- cálculo de probabilidades y cuantiles

- $P(T \leq 0.5)$

`CDF[distG, 0.75] // N`

0.57681

- $P(T > 1)$

`1 - CDF[distG, 1] // N`

0.238103

`Probability[T > 1, T ≈ GammaDistribution[3, 1/4]] // N`

0.238103

- Percentil 35

`Quantile[distG, 0.35]`

0.524659

Ji-cuadrado

Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores $x \geq 0$ sigue una distribución *ji-cuadrado* con ν (parámetro) grados de libertad si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{(x)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \quad \forall x \geq 0$$

Notación: $X \sim \chi^2_{\nu}$

- **ChiSquareDistribution[ν]**. Representa una distribución ji-cuadrado con ν grados de libertad.

Si $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ son variables aleatorias normales estándar e independientes entonces la variable $X \sim \chi^2_\nu$, siendo $\nu = k - 1$, se define como:

$$X = \sum_{i=1}^k Z_i^2$$

Es una función asimétrica positiva, sólo tienen densidad los valores positivos (suma de cuadrados). Se hace más simétrica, incluso casi gaussiana, al aumentar el número de grados de libertad.

Tiene muchas aplicaciones en estadística inferencial como la estimación de varianzas y los test de independencia y bondad de ajuste.

- función de densidad de probabilidad

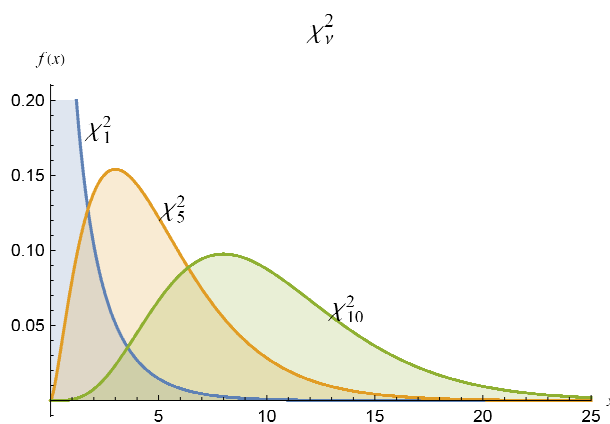
PDF[ChiSquareDistribution[ν], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} \frac{2^{-\nu/2} e^{-x/2} x^{\nu/2-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de densidad para diferentes valores de ν

```

Plot[Table[PDF[ChiSquareDistribution[ $\nu$ ],  $x$ ], { $\nu$ , {1, 5, 10}}] // Evaluate,
  { $x$ , 0, 25}, Filling -> Axis, PlotRange -> {{0, 25}, Automatic},
  PlotLabel -> " $\chi^2_\nu$ ", PlotLabels -> Placed[{" $\chi^2_1$ ", " $\chi^2_5$ ", " $\chi^2_{10}$ "},
    {{Scaled[0.005], Right}, {Scaled[0.19], Right}, {Scaled[0.5], Right}}],
  AxesLabel -> {HoldForm[" $x$ "], HoldForm[" $f(x)$ 
```



- función de distribución de probabilidad

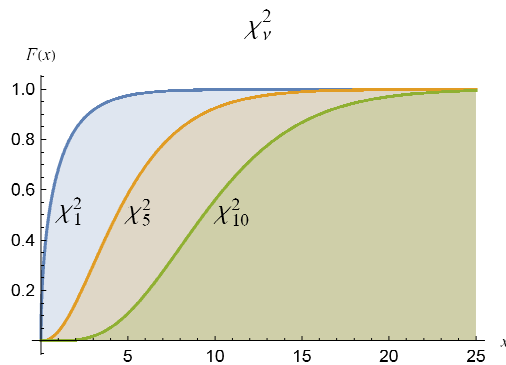
CDF[ChiSquareDistribution[ν], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} Q\left(\frac{\nu}{2}, 0, \frac{x}{2}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de distribución para diferentes valores de ν

```

Plot[Table[CDF[ChiSquareDistribution[ $\nu$ ],  $x$ ], { $\nu$ , {1, 5, 10}}] // Evaluate, { $x$ , 0, 25},
  Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> " $\chi^2_\nu$ ", PlotLabels -> Placed[{" $\chi^2_1$ ", " $\chi^2_5$ ", " $\chi^2_{10}$ "},
    {{Scaled[0.03], Right}, {Scaled[0.179], Right}, {Scaled[0.38], Right}}],
  AxesLabel -> {HoldForm[" $x$ "], HoldForm[" $F(x)$ 
```



- valor esperado

```
Mean[ChiSquareDistribution[v]] // TraditionalForm
```

v

```
Expectation[x, x ≈ ChiSquareDistribution[v]] // TraditionalForm
```

v

- mediana

```
Median[ChiSquareDistribution[v]] // TraditionalForm
```

$$2 Q^{-1}\left(\frac{v}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

- varianza

```
Variance[ChiSquareDistribution[v]] // TraditionalForm
```

$2 v$

Ejemplo. Se considera una variable aleatoria $X \sim \chi_{23}^2$.

- función de densidad de probabilidad

```
distJ = ChiSquareDistribution[23];
```

```
PDF[distJ, x] // TraditionalForm
```

$$\begin{cases} \frac{e^{-x/2} x^{21/2}}{13749310575 \sqrt{2\pi}} & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- función de distribución de probabilidad

```
CDF[distJ, x] // TraditionalForm
```

$$\begin{cases} Q\left(\frac{23}{2}, 0, \frac{x}{2}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

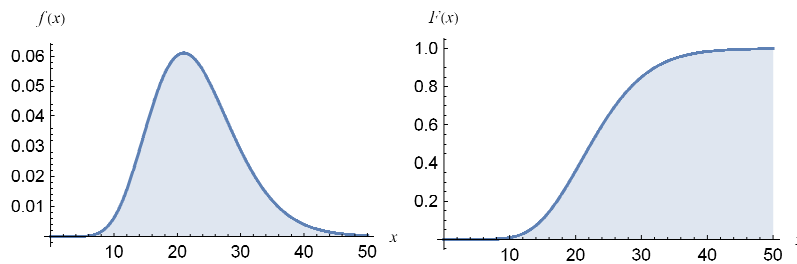
- representación gráfica

```
Grid[
```

```

  {{
    Plot[PDF[ChiSquareDistribution[23], x], {x, 0, 50}, Filling → Axis,
      PlotRange → Automatic, AxesLabel → {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}],
    Plot[CDF[ChiSquareDistribution[23], x], {x, 0, 50}, Filling → Axis,
      PlotRange → All, AxesLabel → {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]}]}

```



- cálculo de probabilidades y cuantiles

- $P(X \leq 20)$

```
CDF[distJ, 20] // N
```

```
0.358088
```

```
Probability[x ≤ 20, x ≈ distJ] // N
```

```
0.358088
```

- $P(X > 40)$

```
1 - CDF[distJ, 40] // N
```

```
0.0153691
```

```
Probability[x > 40, x ≈ distJ] // N
```

```
0.0153691
```

- Percentil 35

```
Quantile[distJ, 0.35]
```

```
19.8657
```

t de Student

Una variable aleatoria continua X sigue una distribución t de Student con ν (parámetro) grados de libertad si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Notación: $X \sim t_\nu$

- **StudentTDistribution[ν]**. Representa una distribución t de Student con ν grados de libertad.

Si $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ son $n+1$ variables aleatorias normales estándar e independientes entonces la variable $X \sim t_\nu$, siendo $\nu = n - 1$, se define como:

$$X = \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Z_i^2}}$$

Surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeña.

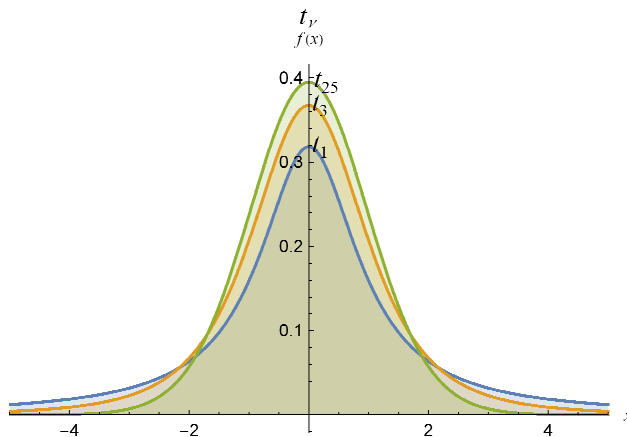
- función de densidad de probabilidad

PDF[StudentTDistribution[ν], x] // TraditionalForm

$$\frac{\left(\frac{\nu}{\nu+x^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}{\sqrt{\nu} B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

- representación gráfica de la función de densidad para diferentes valores de ν

Plot[Table[PDF[StudentTDistribution[ν], x], { ν , {1, 3, 25}}] // Evaluate, { x , -5, 5}, Filling → Axis, PlotRange → {{-5, 5}, Automatic}, PlotLabel → " t_ν ", PlotLabels → Placed[{" t_1 ", " t_3 ", " t_{25} "}, {Scaled[0.5], Right}], AxesLabel → {HoldForm[" x "], HoldForm[" $f(x)$



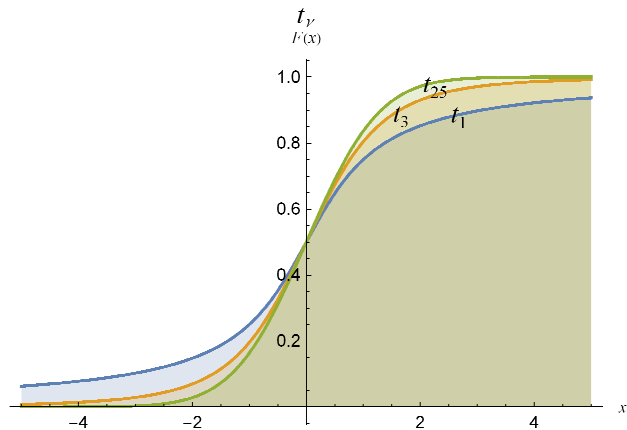
- función de distribución de probabilidad

CDF[StudentTDistribution[ν], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} \frac{1}{2} I_{\frac{\nu}{x^2+\nu}}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right) & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \left(I_{\frac{x^2}{x^2+\nu}}\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) + 1 \right) & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica de la función de distribución para diferentes valores de ν

Plot[Table[CDF[StudentTDistribution[ν], x], { ν , {1, 3, 25}}] // Evaluate, { x , -5, 5}, Filling → Axis, PlotRange → All, PlotLabel → " t_ν ", PlotLabels → Placed[{" t_1 ", " t_3 ", " t_{25} "}, {{Scaled[0.75], Right}, {Scaled[0.65], Right}, {Scaled[0.7], Right}}], AxesLabel → {HoldForm[" x "], HoldForm[" $F(x)$



- valor esperado

Mean[StudentTDistribution [v]] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 0 & v > 1 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Expectation[x, x $\approx$ StudentTDistribution [v]] // TraditionalForm

$$\begin{cases} 0 & v > 1 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

- mediana

Median[StudentTDistribution [v]] // TraditionalForm

0

- varianza

Variance[StudentTDistribution [v]] // TraditionalForm

$$\begin{cases} \frac{v}{v-2} & v > 2 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Ejemplo. Se considera una variable aleatoria $X \sim t_9$.

- función de densidad de probabilidad

distT = StudentTDistribution [9];

PDF[distT, x] // TraditionalForm

$$\frac{2519424}{35 \pi (x^2 + 9)^5}$$

- distribución de probabilidad de la variable aleatoria X
- función de distribución de probabilidad

CDF[distT, x] // TraditionalForm // Simplify

$$\frac{3 x (35 x^6 + 1155 x^4 + 13797 x^2 + 67797)}{35 \pi (x^2 + 9)^4} + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

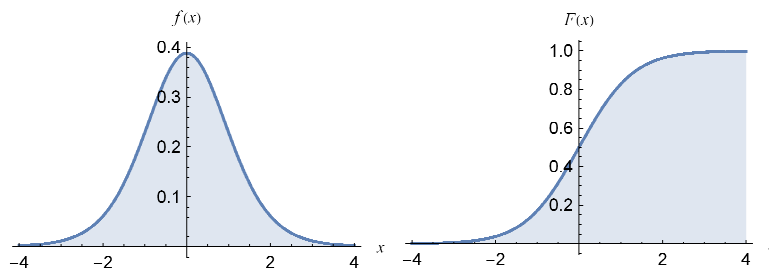
- representación gráfica

Grid[

```

{{
  Plot[PDF[StudentTDistribution[9], x], {x, -4, 4}, Filling -> Axis,
    PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}],
  Plot[CDF[StudentTDistribution[9], x], {x, -4, 4}, Filling -> Axis,
    PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]}]}

```



■ cálculo de probabilidades y cuantiles

■ $P(X \leq 3)$

```
CDF[distT, 3] // N
```

```
0.992522
```

```
Probability[x ≤ 3, x ≈ distT] // N
```

```
0.992522
```

■ $P(X > -2)$

```
1 - CDF[distT, -2] // N
```

```
0.961724
```

```
Probability[x > -2, x ≈ distT] // N
```

```
0.961724
```

■ Percentil 35

```
Quantile[distT, 0.35]
```

```
-0.397868
```

F de Fisher-Snedecor

Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores $x \geq 0$ sigue una distribución F de Fisher-Snedecor con n grados de libertad en el numerador y m grados de libertad en el denominador (parámetros) si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{x^{-1}}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \cdot \left(\frac{nx}{nx+m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(1 - \frac{nx}{nx+m}\right)^{\frac{m}{2}} \quad \forall x \geq 0$$

Notación: $X \sim F_{n,m}$

■ **FRatioDistribution[y]**. Representa una distribución F de Fisher-Snedecor con n grados de libertad en el numerador y m grados de libertad en el denominador.

Si $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ son $n+m$ variables aleatorias normales estándar e independientes entonces la variable $X \sim F_{n,m}$ se define como:

$$X = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Y_i^2}{\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m Z_i^2}$$

Es una función asimétrica positiva, sólo tienen densidad los valores positivos.

En estadística inferencial se usa para la estimación de cocientes de varianzas.

Si $X \sim F_{n,m}$, cuando $m \rightarrow \infty$ se tiene $X \sim \chi_n^2$.

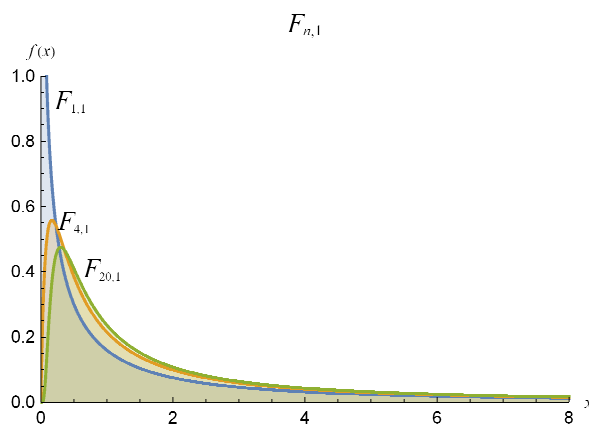
- función de densidad de probabilidad

PDF[FRatioDistribution[n, m], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} \frac{m^{m/2} n^{n/2} x^{\frac{n}{2}-1} (m+nx)^{\frac{1}{2}(-m-n)}}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

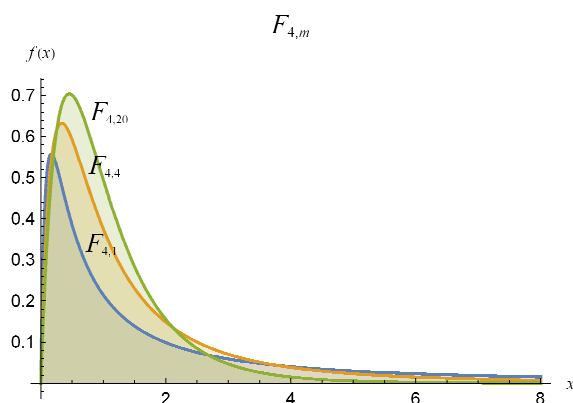
- representación gráfica de la función de densidad para $m = 1$ y diferentes valores de n

```
Plot[Table[PDF[FRatioDistribution[n, 1], x], {n, {1, 4, 20}}] // Evaluate,
{x, 0, 8}, Filling -> Axis, PlotRange -> {{0, 8}, {0, 1}},
PlotLabel -> "F_{n,1}", PlotLabels -> Placed[{"F_{1,1}", "F_{4,1}", "F_{20,1}"},
{{Scaled[0.01], Right}, {Scaled[0.07], Right}, {Scaled[0.1], Right}}],
AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]
```



- representación gráfica de la función de densidad para $n = 4$ y diferentes valores de m

```
Plot[Table[PDF[FRatioDistribution[4, m], x], {m, {1, 4, 20}}] // Evaluate,
{x, 0, 8}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> "F_{4,m}",
PlotLabels -> Placed[{"F_{4,1}", "F_{4,4}", "F_{4,20}"}, {Scaled[0.13], Right}],
AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]
```



- representación gráfica de la función de densidad para diferentes valores de n y m

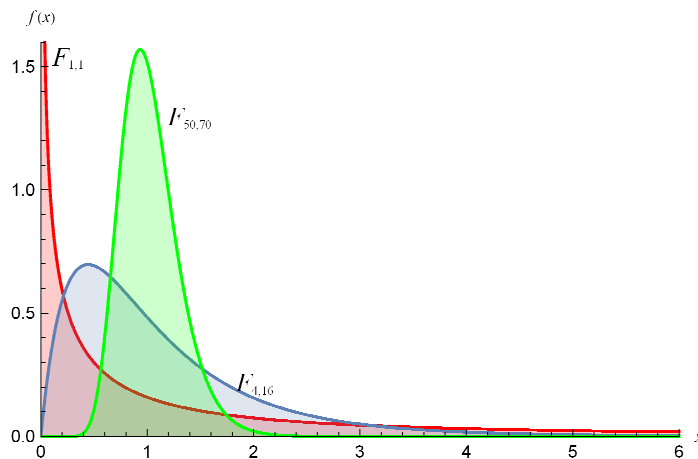
```
F11 = Plot[PDF[FRatioDistribution[1, 1], x] // Evaluate, {x, 0, 6},
Filling -> Axis, PlotRange -> {{0, 6}, {0, 1.6}}, PlotStyle -> Red, PlotLabels ->
Placed["F_{1,1}", {Scaled[0.01], Right}], AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]
```

```

F416 = Plot[PDF[FRatioDistribution[4, 16], x] // Evaluate, {x, 0, 6}, Filling -> Axis,
  PlotRange -> {{0, 6}, {0, 1}}, PlotLabels -> Placed["F4,16", {Scaled[0.35], Right}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]];

F5070 = Plot[PDF[FRatioDistribution[50, 70], x] // Evaluate,
  {x, 0, 6}, Filling -> Axis, PlotRange -> {{0, 6}, {0, 1.6}},
  PlotStyle -> Green, PlotLabels -> Placed["F50,70", {Scaled[0.3], Right}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}]];

Show[F11, F416, F5070, PlotRange -> All]
  
```



■ función de distribución de probabilidad

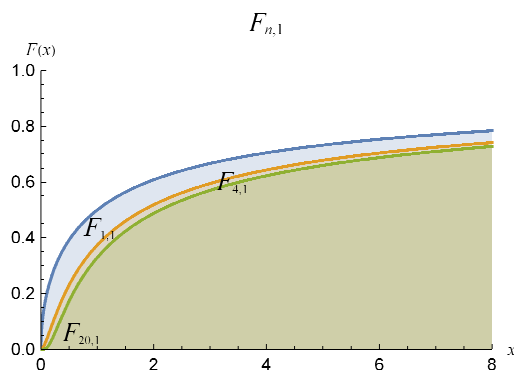
CDF[FRatioDistribution[n, m], x] // TraditionalForm

$$\begin{cases} I_{\frac{nx}{m+nx}}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

■ representación gráfica de la función de densidad para $m = 1$ y diferentes valores de n

```

Plot[Table[CDF[FRatioDistribution[n, 1], x], {n, {1, 4, 20}}] // Evaluate,
  {x, 0, 8}, Filling -> Axis, PlotRange -> {{0, 8}, {0, 1}},
  PlotLabel -> "Fn,1", PlotLabels -> Placed[{"F1,1", "F4,1", "F20,1"},
    {{Scaled[0.1], Right}, {Scaled[0.38], Right}, {Scaled[0.03], Right}}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}]
  
```

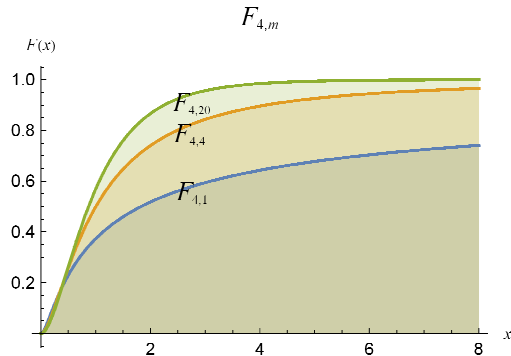


- representación gráfica de la función de densidad para $n = 4$ y diferentes valores de m

```

Plot[Table[CDF[FRatioDistribution[4, m], x], {m, {1, 4, 20}}] // Evaluate,
  {x, 0, 8}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, PlotLabel -> "F_{4,m}",
  PlotLabels -> Placed[{"F_{4,1}", "F_{4,4}", "F_{4,20}"}, {Scaled[0.3], Right}],
  AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]}

```



- valor esperado

```
Mean[FRatioDistribution[n, m]] // TraditionalForm
```

$$\begin{cases} \frac{m}{m-2} & m > 2 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

```
Expectation[x, x \(\sim\) FRatioDistribution[n, m]] // TraditionalForm
```

$$\begin{cases} \frac{m}{2\left(\frac{m}{2}-1\right)} & m > 2 \\ \infty & \text{True} \end{cases}$$

- mediana

```
Median[FRatioDistribution[n, m]] // TraditionalForm
```

$$\frac{m \left(\frac{1}{I^{-1}_{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} - 1 \right)}{n}$$

- varianza

```
Variance[FRatioDistribution[n, m]] // TraditionalForm
```

$$\begin{cases} \frac{2 m^2 (m+n-2)}{(m-4) (m-2)^2 n} & m > 4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Ejemplo. Se considera una variable aleatoria $X \sim F_{9,7}$.

- función de densidad de probabilidad

```
distF = FRatioDistribution[9, 7];
```

```
PDF[distF, x] // TraditionalForm
```

$$\begin{cases} \frac{13826598912 \sqrt{7} x^{7/2}}{5 \pi (9 x+7)^8} & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- función de distribución de probabilidad

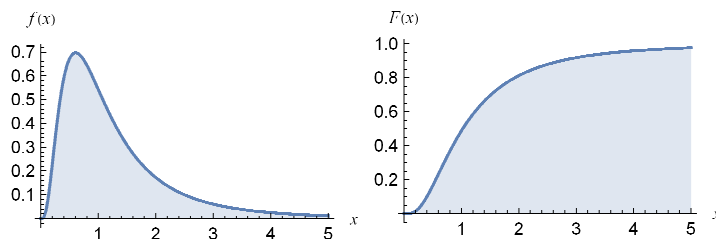
`CDF[distF, x] // TraditionalForm`

$$\begin{cases} I_{\frac{9x}{9x+7}}\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

- representación gráfica

`Grid[`

```
{ {
  Plot[PDF[FRatioDistribution[9, 7], x], {x, 0, 5}, Filling -> Axis,
  PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["f(x)"]}],
  Plot[CDF[FRatioDistribution[9, 7], x], {x, 0, 5}, Filling -> Axis,
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {HoldForm["x"], HoldForm["F(x)"]} ] }
```



- cálculo de probabilidades y cuantiles

- $P(X \leq 2)$

`CDF[distF, 2] // N`

0.813503

`Probability[x ≤ 2, x ≈ distF] // N`

0.813503

- $P(X > 4)$

`1 - CDF[distF, 4] // N`

0.0405666

`Probability[x > 4, x ≈ distF] // N`

0.0405666

- Percentil 35

`Quantile[distF, 0.35]`

0.77094