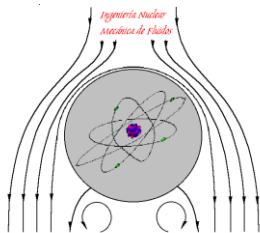


eman ta zabal zazu

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa.



Gorka Alberro Eguilegor
Joseba Aranburu Aierbe
Ganix Esnaola Aldanondo
Maddi Garmendia Antín
Estibalitz Goikoetxea Miranda

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN ONDORIOZTAPENA EULER-EN EKUAZIOTIK ABIATUTA. SINPLIFIKAZIORAKO HIPOTESIAK

Honako abiapuntu hau hartzen dugu:

$$\vec{M} = \vec{\nabla}U + \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla}P + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \left(\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} \right) = 0$$

Jada kontutan hartutako hipotesiak:

- Fluido perfektoa ($\mu=0$).
- Eremu grabitatorioa.
- Fluxu irrotazionala $\longrightarrow \text{rot } \vec{v} = 0$

$$\vec{M} = \vec{\nabla} \left(g \cdot z + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla}P + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN ONDORIOZTAPENA EULER-EN EKUAZIOTIK ABIATUTA. SINPLIFIKAZIORAKO HIPOTESIAK

M bektore horren proiektzioa edozein s norabidean:

$$\vec{M}_s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} \cdot \vec{s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(g \cdot z + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{s} + \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = 0$$

Aurreko ekuazioa bider $\vec{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}$ eginez:

$$\vec{M}_s \cdot \vec{s} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} \cdot \vec{s} \cdot \vec{s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(g \cdot z + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{s} \cdot \vec{s} + \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = 1 \cdot \partial s \cdot \cos 0 = \partial s \text{ izanda,}$$

$$\vec{M}_s \cdot \vec{s} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} \cdot \partial s + \frac{\partial}{\partial s} \left(g \cdot z + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \partial s + \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\vec{M}_s \cdot \vec{s} = \frac{1}{\rho} \cdot dP + d \left(g \cdot z + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\int_A^B \frac{1}{\rho} \cdot dP + \int_A^B d \left(g \cdot z + \frac{v^2}{2} \right) + \int_B^B \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} \cdot \vec{s} = K(s, t)$$

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN ONDORIOZTAPENA EULER-EN EKUAZIOTIK ABIATUTA. SINPLIFIKAZIORAKO HIPOTESIAK

- Fluxu iraunkorra:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = 0$$

$$\int_A^B \frac{1}{\rho} \cdot dP + (g \cdot z + \frac{v^2}{2}) = K(s)$$

- Fluxu konprimaezina:

$$\frac{1}{\rho} \cdot P + (g \cdot z + \frac{v^2}{2}) = K(s)$$

$$\frac{P_A}{\rho} + g \cdot z_A + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + g \cdot z_B + \frac{v_B^2}{2}$$

Bernoulli-ren ekuazioa edo Energiaren Kontserbazioaren Ekuazioa

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN ONDORIOZTAPENA EULER-EN EKUAZIOTIK ABIATUTA. SINPLIFIKAZIORAKO HIPOTESIAK

Frogapen bera beste era batean. Abiapuntutzat:

$$\vec{R} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P + \nu \cdot \nabla^2 \vec{v} = \vec{a}$$

1. Hipotesia: Fluido perfektoa ($\mu=0$).

$$\vec{R} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{a}$$

2. Hipotesia: Eremu grabitatorioa.

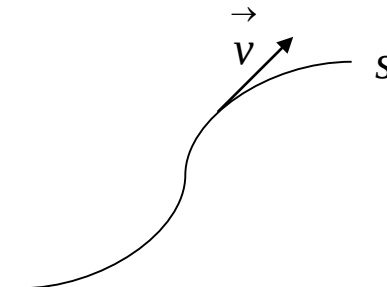
$$\vec{R} = -\vec{\nabla} U$$

$$-\vec{\nabla} U - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{a}$$

3. Hipotesia: Korrante lerro berari (s) aplikatuta.

$$\vec{v} = \vec{v}(s, t)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \vec{v}$$



10.1 Irudia. Korrante lerroa.
Geure irudia.

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN ONDORIOZTAPENA EULER-EN EKUAZIOTIK ABIATUTA. SINPLIFIKAZIORAKO HIPOTESIAK

Bektorearen proiektzioa korrante lerroaren s norabidean:

$$\begin{aligned}
 -\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla}P &= \vec{a} \\
 -\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \cdot v
 \end{aligned}$$

4. Hipotesia: Fluxu iraunkorra.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial s} \cdot v \\
 -\frac{d(g \cdot z)}{ds} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{ds} &= \frac{dv}{ds} \cdot v \\
 -d(g \cdot z) - \frac{1}{\rho} \cdot dP &= v \cdot dv
 \end{aligned}$$

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN ONDORIOZTAPENA EULER- EN EKUAZIOTIK ABIATUTA. SINPLIFIKAZIORAKO HIPOTESIAK

5. Hipotesia: Fluxu konprimaezina. Ekuazioa integratuz:

$$g \cdot z + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = kte$$

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN BALIAGARRITASUN BALDINTZAK ETA INTERPRETAZIO FISIKOA

$$\frac{P}{\rho} + g \cdot z + \frac{v^2}{2} = K(s)$$

$$\frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2 \cdot g} = K'(s)$$

$$P + \gamma \cdot z + \rho \cdot \frac{v^2}{2} = K''(s)$$

Bernoulli-ren ekuazioa fluxu konprimaezin eta iraunkorrei aplikatzen zaie, marruskadurarik gabekoak, $K(s)$ balio desberdina duelarik korrante lerro bakoitzarentzat.

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN BALIAGARRITASUN BALDINTZAK ETA INTERPRETAZIO FISIKOA

$$\frac{P}{\rho} = \frac{[F] \cdot [L]^3}{[M] \cdot [L]^2} = \frac{[F] \cdot [L]}{[M]} = \frac{\text{Energia}}{\text{Masa}} \left(\frac{\text{J}}{\text{Kg}} \right)$$

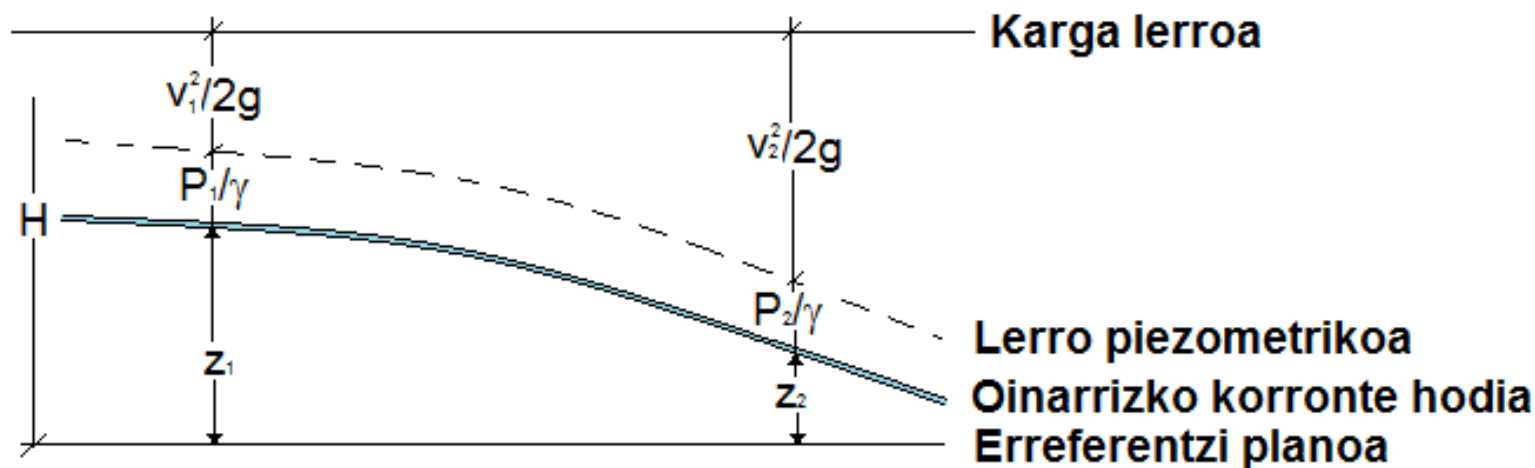
$$\frac{P}{\gamma} = \frac{[F] \cdot [L]^3}{[F] \cdot [L]^2} = \frac{[F] \cdot [L]}{[F]} = \frac{\text{Energia}}{\text{Pisua}} \left(\frac{\text{J}}{\text{N}} \right)$$

$$P = \frac{[F] \cdot [L]^3}{[L]^3 \cdot [L]^2} = \frac{[F] \cdot [L]}{[L]^3} = \frac{\text{Energia}}{\text{Bolumena}} \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right)$$

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN BALIAGARRITASUN BALDINTZAK ETA INTERPRETAZIO FISIKOA

Presio energia (Presio estatikoa)	→	$P/\gamma = z_p$
Energia potentziala, geodesikoa, kota, posizioa	→	z
Energia zinetikoa, abiadura (Presion dinamikoa)	→	$v^2/2 \cdot g = z_v$



10.2 Irudia. Karga lerro eta lerro piezometrikoen errepresentazioa konduktu batean. Geure irudia.

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN SORPENEAN KONTUTAN HARTUTAKO HIPOTESIAK. BERNOUULLI-REN EKUAZIO OROKORTUA.

- Gainazal askea duen biltegia jatorritzat duten korrante lerroen kasuan, Bernoulli-ren konstantea balio bera izango du lerro guztietan.
- Gasen kasuan, aldakuntza txikia bada (Presio absolutoaren %2-3), $P = \rho \cdot R \cdot T$ denez, dentsitate aldakuntza txikiak izango dira, ondorioz gas hori konprimaegin kontsideratuko da. Adib. haizagailuak.
- Fluxuaren aldakuntzak denborarekiko txikiak baldin badira, nahiz eta fluxu ez iraunkorra izan, Bernoulli-ren ekuazioa erabili daiteke. Adib. biltegien hustuketa.
- Fluxu erreala ($\mu \neq 0$). Biskositateak ebakidura esfortzuak sortzen ditu eta hau dela eta, galera mekanikoak edo karga galerak.

$$B_1 = B_2 + h_{f_{1 \rightarrow 2}}$$

$$h_{f_{1 \rightarrow 2}} = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

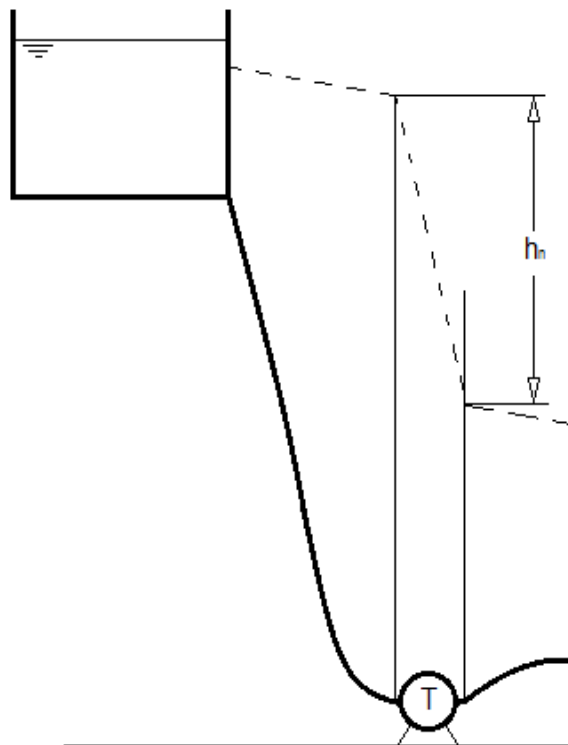
10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN SORPENEAN KONTUTAN HARTUTAKO HIPOTESIAK. BERNOUULLI-REN EKUAZIO OROKORTUA.

Energiaren ekarpena ponpatan

$$B_1 + h_m = B_2$$

h_m = Altuera manometrikoa (H_B)

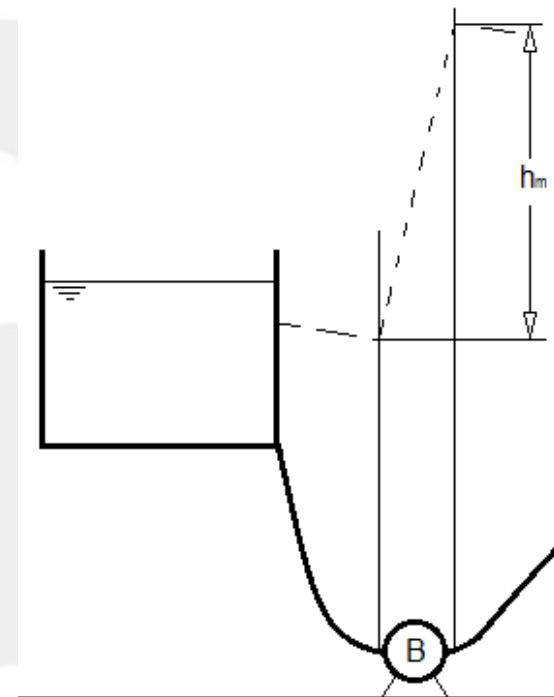


10.4 Irudia. Turbinadun instalazio baten lerro piezometrikoaren errepresentazioa. Geure irudia.

Energiaren erauzketa turbinatan

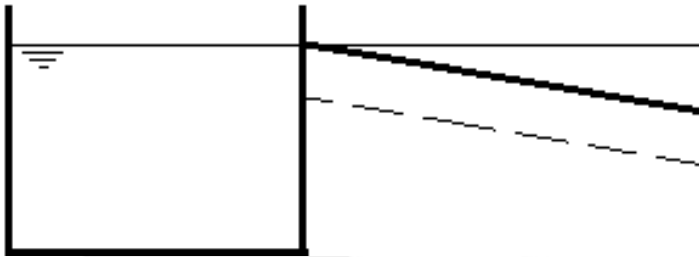
$$B_1 = B_2 + h_n$$

h_n = Altuera netoa (H_T)



10.3 Irudia. Ponpadun instalazio baten lerro piezometrikoaren errepresentazioa. Geure irudia.

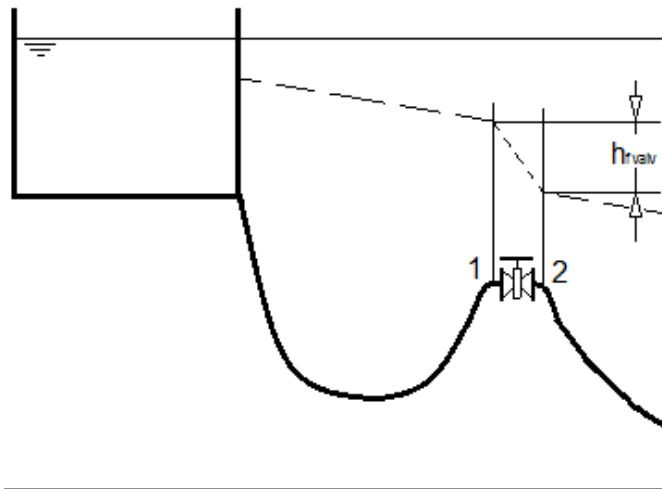
BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN SORPENEAN KONTUTAN HARTUTAKO HIPOTESIAK. BERNOUULLI-REN EKUAZIO OROKORTUA.



10.5 Irudia. Hodietako karga galeren lerro piezometrikoaren errepresentazioa. Geure irudia.

$$B_1 = B_2 + h_{f_{1 \rightarrow 2}}$$

$$h_{f_{1 \rightarrow 2}} = K \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$



10.6 Irudia. Pieza bereziaetako (balbulak edo ukondoak adib) lerro piezometrikoaren errepresentazioa. Geure irudia.

$$B_1 = B_2 + h_{f_{1 \rightarrow 2}}$$

$$h_{f_{1 \rightarrow 2}} = H_v = K_v \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-RENEKUAZIOAREN SORPENEAN KONTUTAN HARTUTAKO HIPOTESIAK. BERNOLLI-REN EKUAZIO OROKORTUA.

Ponpa edo turbina baten potentzia, definizioz, bertatik pasatzen den fluidoarekin elementu horrek denbora-unitatean trukutzen duen energia da. Trukaturiko energiaren ondorioz altuera baliokidearen gehikuntza z baliokoa bada, $W = \dot{m} \cdot g \cdot z$, orduan:

$$W = \dot{m} \cdot g \cdot z = \rho \cdot Q \cdot g \cdot z = \gamma \cdot Q \cdot z$$

Eta W_{MP} y W_{MT} balioak ponpari aplikaturiko potentzia mekanikoa eta turbinak sorturiko potentzia mekanikoa badira, makina horien etekinak edo errendimenduak honelaxe definitzen dira:

$$\eta_P = \frac{W_P}{W_{MP}} \qquad \eta_T = \frac{W_{MT}}{W_T}$$

Adierazpen horietan, $W_P = \gamma \cdot Q \cdot h_m$ ponpak fluidoari emandako potentzia da, zeinari potentzia hidraulikoa deritzon, eta $W_T = \gamma \cdot Q \cdot h_n$ urak turbinari ematen dio potentzia hidraulikoa da.

10. Gaia: Bernoulli-ren ekuazioa

BERNOULLI-REN EKUAZIOAREN SORPENEAN KONTUTAN HARTUTAKO HIPOTESIAK. BERNOLLI-REN EKUAZIO OROKORTUA.

Adierazpen erabiliena harturik :

$$B = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow P = \frac{\text{Energia}}{\text{Pisua}} \cdot \frac{\text{Pisua}}{\text{Bolumena}} \cdot \frac{\text{Bolumena}}{\text{Denbora}} = B \cdot \gamma \cdot Q$$

Txorrotada baten kasuan :

$$B = \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow P = \gamma \cdot Q \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Presioa soilik duen energiaren kasuan :

$$B = \frac{P}{\gamma} \Rightarrow P = \gamma \cdot Q \cdot \frac{P}{\gamma} = P \cdot Q$$

Potentzia galdua :

$$P = \gamma \cdot Q \cdot h_{f_{1 \rightarrow 2}}$$