Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea



# 3. Gaia: Fluidoen estatikako lege orokorrak.

Gorka Alberro Eguilegor
Joseba Aranburu Aierbe
Ganix Esnaola Aldanondo
Maddi Garmendia Antín
Estibalitz Goikoetxea Miranda

## *SARRERA. FLUIDOAREN GAINEAN ERAGITEN DUTEN INDARRAK.*

Fluidoen mekanikaren azterketan hiru mota nagusiko indarrak kontsideratzen dira:

- **Gainazal-indarrak.** Ingurunearen mugetan eragiten dute kontaktu zuzenaren bidez. Adibide gisa aipatzeko, indar horietako garrantzitsuena presioa da.

- **Bolumen-indarrak.** Fluidoaren bolumenean banaturik dauden indarrak dira, eta kontaktu fisikorik gabe eragiten dute. Adibide gisa, *indar grabitatorioak* eta *indar elektromagnetikoak* aipa ditzazkegu.

- **Barne indarrak**. Partikulen artean duten atrakzio edo erakarpenak eragindakoak dira.

## *SARRERA. FLUIDOAREN GAINEAN ERAGITEN DUTEN INDARRAK.*

Gainazaletan aplikatzen diren indarrek hiru osagai dituzte:

- Gainazalarekiko perpendikularra den ***osagai normala***, normalean $\sigma$ letraz adierazten dena, eta zeinaren eraginez konpresiozko edo trakziozko esfortzuak sortzen diren.

- Gainazalarekiko ukitzaileak diren ***osagai tangentzialak***, gainazalaren plano ukitzailean aplikaturik daudenak, eta normalean $\tau$ letraz adierazten direnak. Indar horiek gainazalaren beraren labainketa edo deformazioa sorrarazten dute. Bi osagai dira, gainazalak bi dimentsioko izaera baitu.

Bolumen-indarrak kanpo-eremuen eraginaren ondoriozkoak dira, hala nola grabitazio-eremuaren edo eremu elektromagnetikoaren eraginaren ondoriozkoak, eta eremu horiei dagozkien legeen bidez definituko dira. Indar horiek izaera bektorialekoak dira, eta hortaz, hiru osagaitan deskonposa daitezke, nahiz eta normalean osagaietako bat bakarra ez-nulua izateko moduan aukeratzen den erreferentzia-sistema.

## *FLUIDOKO PUNTU BATEKO PRESIOA. PRESIOEN ISOTROPIA-PRINTZIPIOA*

Bataz besteko presioa, definizioz, gainazal lau batean eragiten duen indar normalaren eta gainazal horren azaleraren arteko zatidura da:

$$P = \frac{F_n}{S}$$

Puntu bateko presioa erlazio horren limitea da indar horren aplikazio-azalera zerorantz joatean puntu horren inguruan.

$$p_i = \lim_{\delta A_i \to 0} \frac{F_n}{\delta A_i}$$

# *FLUIDOKO PUNTU BATEKO PRESIOA. PRESIOEN ISOTROPIA-PRINTZIPIOA*

Isotropia-printzipioak honako hau ezartzen du: ***Pausagunean dagoen fluidoaren puntu batean, presioak balio bera du norabide guztietan***.

- Printzipio hori frogatzeko, ziri-formako gorputz aske bat kontsideratuko dugu, lodiera unitatekoa, pausagunean dagoen fluidoko (x,y) puntuan dagoena. Gorputz horren gainean soilik eragiten dute **gainazal-indar normalek** eta **grabitatearen indarrak**, zeren, fluidoa pausagunean dagoenez, ez baitago inguruko fluidoarekiko marruskadura edo igurtzidurazko ebakidura-indarrik.

- Azterketan $\theta$ angelua arbitrarioa izan da; hortaz, erlazio hori edozein norabidetan betetzen da fluido estatikoaren kasuan.

# *FLUIDOKO PUNTU BATEKO PRESIOA. PRESIOEN ISOTROPIA-PRINTZIPIOA*

Ondorioz, honako hau dugu:

- Grabitate indarra,

$$F_m = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} = \frac{\gamma \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2}$$

- eta ziri gaineko gainazal indarrak presioen ondorioz:

$$F_x = p_x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

$$F_y = p_y \cdot \delta x \cdot \delta z$$

$$\vec{F}_s = p_s \cdot (sen\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}) \cdot \delta S \cdot \delta z$$

## *FLUIDOKO PUNTU BATEKO PRESIOA. PRESIOEN ISOTROPIA-PRINTZIPIOA*

Era horretan, higiduraren ekuazioak analisi bidimentsionaleko ardatzen norabideetan aplikatuz, honako hau dugu:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum F_x = p_x \cdot \delta y \cdot \delta z - p_s \cdot \delta z \cdot \delta s \cdot sen\theta = \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} \cdot \rho \cdot a_x = 0$$

$$\sum F_y = p_y \cdot \delta x \cdot \delta z - p_s \cdot \delta z \cdot \delta s \cdot \cos\theta - \gamma \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} = \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} \cdot \rho \cdot a_y = 0$$

Adierazpen horietan, fluidoa pausagunean dagoenez eta ziria higitzen ez denez, azelerazioa nulua da; hortaz, indarren batura nulua da, bai x norabidean eta bai y norabidean ere. Ziriaren aldeen arteko θ angeluaren erlazio trigonometrikoak erabiliz, hauxe dugu:

$$\delta x = \delta s \cdot \cos\theta$$

$$\delta y = \delta s \cdot sen\theta$$

## *FLUIDOKO PUNTU BATEKO PRESIOA. PRESIOEN ISOTROPIA-PRINTZIPIOA*

eta aurreko adierazpena sinplifikatu egiten dira era honetan:

$$p_x \cdot \delta y \cdot \delta z - p_s \cdot \delta y \cdot \delta z = 0$$

$$p_y \cdot \delta x \cdot \delta z - p_s \cdot \delta x \cdot \delta z - \gamma \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} = 0$$

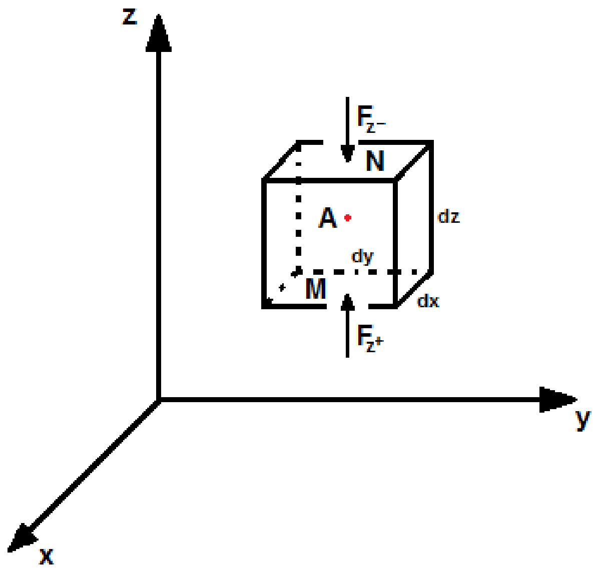
Azkenik, zeroranzko limitea egitean grabitatearen indarrei dagokien gaia arbuiatuz (bigarren ordenako infinitesimoa baita), ondoko erlazioa betetzen da:

$$p_x = p_y = p_s$$

Azterketan $\theta$ angelua arbitrarioa izan da; hortaz, erlazio hori edozein norabidetan betetzen da fluido estatikoaren kasuan.

## *FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA*

Helburua, pausagunean dagoen fluido baten barneko presio-eremua determinatzea da. Kubo formako fluido-elementu bat kontsideratuko dugu, zeinaren aurpegiak erreferentzia-sistemako ardatzen paraleloak diren. Elementu diferentzial horrek *dm* masa eta *dx*, *dy* eta *dz* aldeak ditu, hurrengo irudian erakusten den bezala. Pausagunean dagoen fluido-elementuan eragiten duten indarrak gainazal-indarrak eta bolumen-indarrak dira.




A puntua (x, y, z)
Presioa = p = f(x,y,z)

3.1 Irudia. Kubo formako fluido-elementua.
Geure irudia.

## FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA

Fluidoaren bolumenak jasaten duen presioaren ondoriozko **gainazal-indarrak** era honetan adierazten dira:

$$F_{z-} = \left( p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy$$

$$F_{z+} = \left( p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy$$

non *p* delakoa bolumenaren zentroko (*x*,*y*,*z*) puntuan dagoen presioa den, *dp/dz* delakoa *z* norabidean duen deribatua den, eta *dz*/2 balioa bolumenaren zentrotik indarraren aplikazioko z norabidearekiko perpendikularra den aurpegirako distantzia den.

$$M \ eta \ N \ artean \quad (dx = 0, dy = 0)$$

$$\Rightarrow Fz = -\frac{\partial p}{\partial z} dzdxdy \Rightarrow dp = -\frac{\partial p}{\partial z} dz$$

## FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA

Beste ardatzen kasuan:

$$(dy=0, dz=0)\quad dp=-\frac{\partial p}{\partial x}dx; \qquad \Rightarrow Fx=-\frac{\partial p}{\partial x}dzdxdy$$

$$(dx=0, dz=0)\quad dp=-\frac{\partial p}{\partial y}dy \qquad \Rightarrow Fy=-\frac{\partial p}{\partial y}dzdxdy$$

Fluido elementuan eragiten duten masa unitateko indarrak (R) honela adierazten dira:

$$\text{Bolumen indarrak (N)}: \ \vec{R}\cdot dm=\vec{R}\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz=$$

$$R_X\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot\vec{i}+R_Y\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot\vec{j}+R_Z\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot\vec{k}$$

## *FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA*

z ardatzean indar horiek gehituz, honako hau lortzen da:

$$\partial F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + Rz \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Beste bi ardatz kartesiarren norabidean, gorputzarekiko indarrik gabe, hau dugu:

$$\partial F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + Rx \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\partial F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z + R_Y \cdot \rho \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

Fluido bolumenean eragiten duen indarraren bektorea:

$$\partial \vec{F} = \vec{i} \cdot \partial F_x + \vec{j} \cdot \partial F_y + \vec{k} \partial F_z =$$

$$-\left( \vec{i}\, \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\, \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\, \frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \vec{R} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

## FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA

Indar hori nulua izan behar da pausagunean dagoen likidoaren kasuan, zeren fluido horren partikulak ez baitira deformatzen, fluidoaren barnean ez baitago higidura erlatiborik. Magnitude eskalarren gradientea adierazteko erabiltzen den nabla eragilea kontuan izanik *p*-ren gradienteak bolumen-unitateko presiozko gainazal-indarren bektore-eremua adierazten duela ikus daiteke:

$$d\vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)\cdot dx\cdot dy\cdot dz + \vec{R}\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz = 0$$

$$\vec{R} = \frac{1}{\rho}\cdot\vec{\nabla}P = \frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{grad P} \quad (N/kg)$$

## *FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA*

Estatikaren ekuazioan bolumen indarrak, potentzial (U) batetik sortzen direnean:

$$U = \frac{E_p}{m} = g \cdot z$$

$$\overrightarrow{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = g\,\vec{k}$$

$$\frac{Pisua}{m} = -g\,\vec{k} \Rightarrow \vec{R} = -g\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot U$$

Estatikaren funtsezko ekuazioan ordezkatuz:

$$-\overrightarrow{\nabla} \cdot U = \frac{1}{\rho} \cdot \overrightarrow{\nabla} \cdot P$$

## *FLUIDOEN ESTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA*

- Gainazal ekipotentzialak (U=kte) isobarikoak dira.
- Gainazal ekipotentzialak (U=kte) ekidentsoak dira.
- Gainazal ekipotentzialak(U=kte) isotermikoak dira.