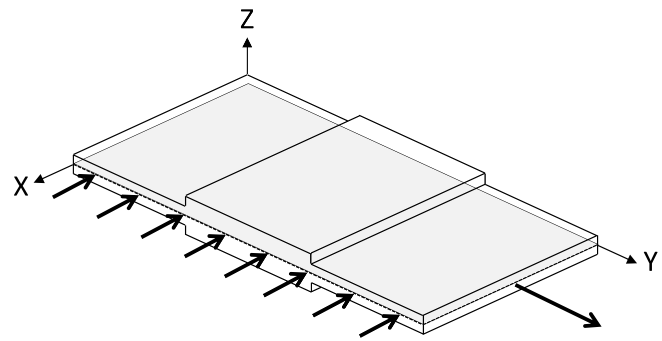
TEMA 4 – Análisis de modelos bidimensionales

Mikel Abasolo Bilbao
Ibai Coria Martínez
Iker Heras Miguel

- Cualquier sistema físico tiene 3 dimensiones, pero en ciertos casos se puede modelizar como una superficie plana (bidimensional) y mallarlo con elementos bidimensionales
- Para que esto sea posible, es necesario que la pieza tridimensional esté sometida a un estado de:
  - tensión plana
  - deformación plana
  - axisimetría
- En estos casos, el modelo bidimensional proporciona los mismos resultados que un modelo tridimensional, pero con un coste menor al tener menos grados de libertad

- Para que una pieza tridimensional esté bajo un estado de tensión plana, se tienen que cumplir las siguientes condiciones:
  - la geometría de la pieza debe tener un plano de simetría xy.
  - el espesor debe ser mucho menor que las dimensiones de la pieza en el plano xy. No es necesario que el espesor sea uniforme en toda la pieza.
  - las cargas y condiciones de contorno deben estar aplicadas en el plano de simetría xy.
- Bajo estas condiciones, la pieza se puede modelizar como una superficie en el plano xy (en gris) y mallar con elementos bidimensionales.



- El desplazamiento del modelo se da en el plano xy. A partir de las deformaciones en un punto se calculan las extensiones:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\{x\}) \\ \varepsilon_{yy}(\{x\}) \\ \varepsilon_{xy}(\{x\}) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x(\{x\}) \\ \delta_y(\{x\}) \end{Bmatrix}$$

- También se da una extensión en dirección z, ε_{zz}, ya que al deformarse la pieza en el plano xy, su espesor z cambia. El resto de extensiones fuera del plano xy son nulas, $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$.

- Las tensiones se obtienen a partir de las extensiones:

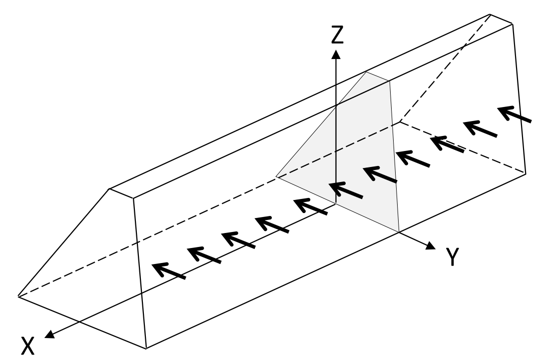
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \longleftarrow [\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1-\nu) \end{bmatrix}$$

- El resto de tensiones son nulas, $\sigma_{zz}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$

- La tensión en dirección z (σ_{zz}) es nula porque la pieza cambia de espesor libremente y por tanto no se desarrollan tensiones en esa dirección.

- Por tanto, sólo existen tensiones en plano xy, de ahí el nombre de estado de tensión plana

- Para que una pieza tridimensional esté bajo un estado de deformación plana, se tienen que cumplir las siguientes condiciones:
  - la pieza debe tener una dimensión (en dirección z) mucho mayor que las dimensiones en las otras dos direcciones (x, y)
  - la sección, cargas y condiciones de contorno de la pieza deben ser idénticas en cualquier plano xy
- Bajo estas condiciones, la pieza se puede modelizar como una superficie en el plano xy (en gris) y mallar con elementos bidimensionales.



eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

- El desplazamiento se da en el plano xy. Las extensiones:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\{x\}) \\ \varepsilon_{yy}(\{x\}) \\ \varepsilon_{xy}(\{x\}) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x(\{x\}) \\ \delta_y(\{x\}) \end{Bmatrix}$$

- La extensión en dirección z es nula (ε_{zz}=0) porque el resto de secciones impiden a cualquier sección expandirse o contraerse en dicha dirección

- Además, ε_{xz}=ε_{yz}=0, por tanto sólo existen deformaciones en el plano xy, y de ahí el nombre de estado de deformación plana

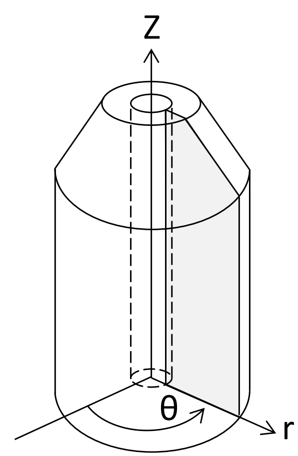
- Las tensiones:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\cdot(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

- Además de σ_{xx}, σ_{yy} y τ_{xy}, también existe σ_{zz}, ya que al no poder deformarse la sección en z, se desarrolla una tensión en esa dirección.

- Para que una pieza tridimensional esté bajo un estado de deformación plana, se tienen que cumplir las siguientes condiciones:
  - la pieza debe tener una geometría con simetría respecto de un eje.
  - las cargas y condiciones de contorno a también deben tener simetría respecto del eje
- Bajo estas condiciones, la pieza se puede modelizar como una superficie en el plano xy (en gris) y mallar con elementos bidimensionales.



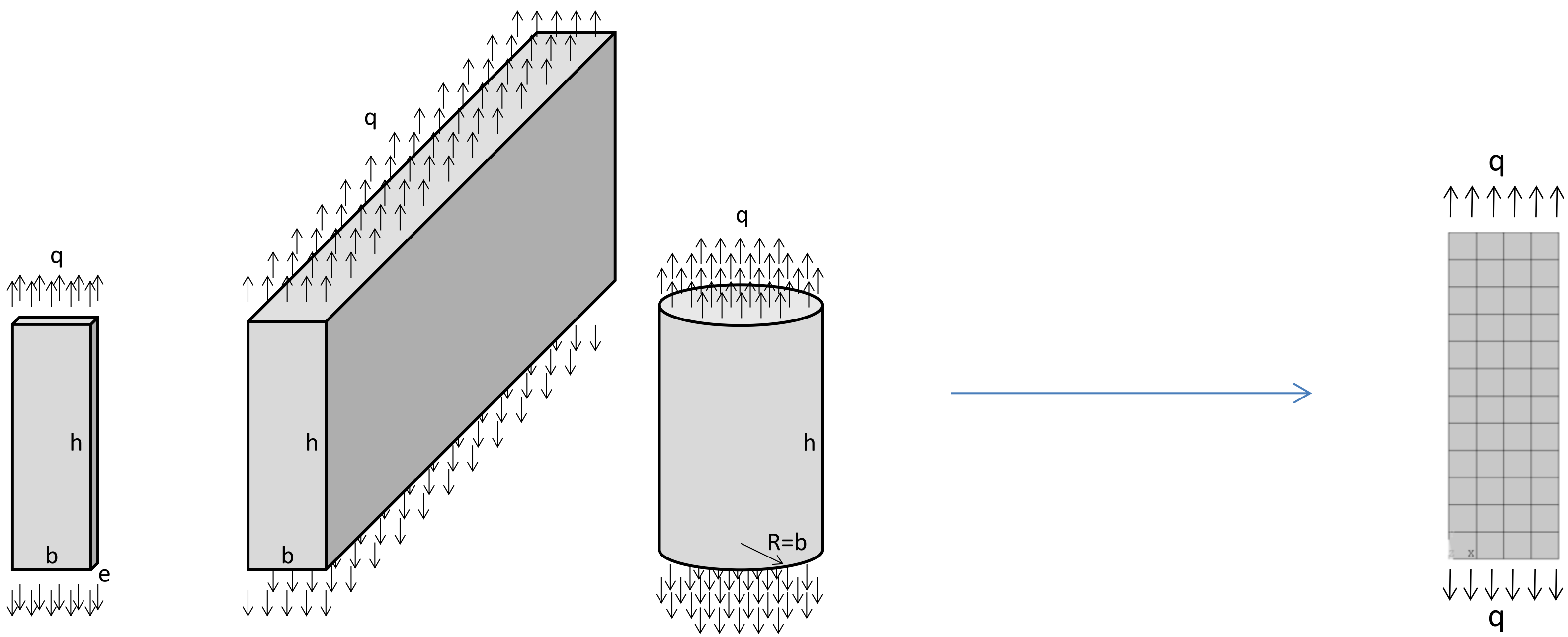
- El desplazamiento se da en el plano rz. En este caso las extensiones:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr}(\{x\}) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(\{x\}) \\ \varepsilon_{zz}(\{x\}) \\ \varepsilon_{rz}(\{x\}) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x(\{x\}) \\ \delta_y(\{x\}) \end{Bmatrix}$$

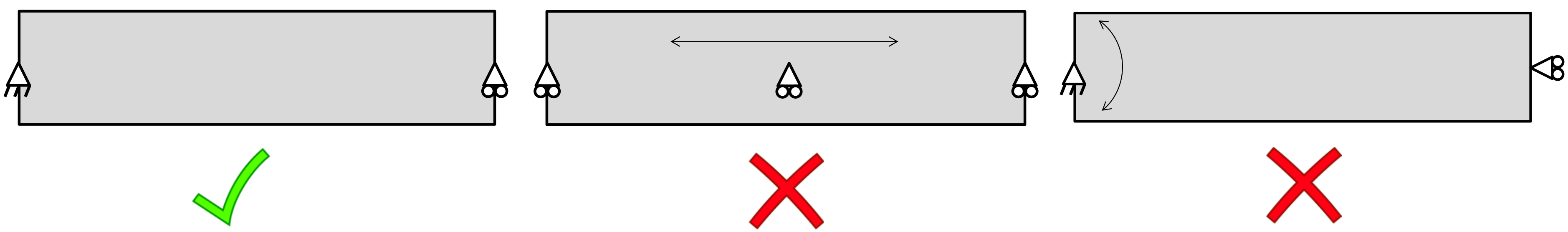
- Y las tensiones:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \longleftarrow \quad [\mathrm{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\cdot(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

- Por tanto, los tres casos de la figura (tensión plana, deformación plana y axisimetría) de la izquierda se analizarían con el modelo de EF bidimensional de la derecha, siendo q la fuerza por unidad de longitud



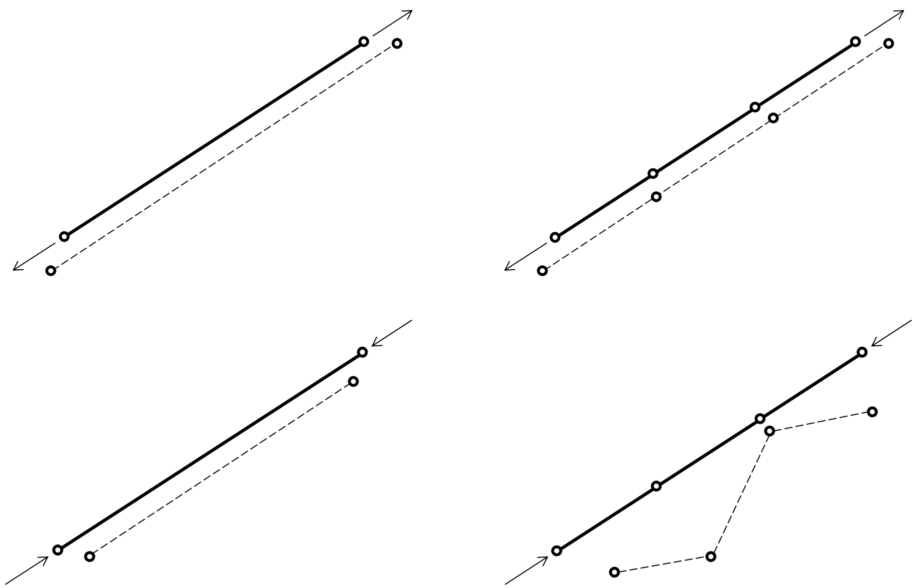
- Para poder resolver la ecuación de equilibrio estático, al modelo de EF se le debe restringir cualquier movimiento de sólido rígido
- En un modelo bidimensional (tensión plana, deformación plana o axisimetría) ha de evitarse la traslación en x, y, y el giro en xy
- Para ello el modelo bidimensional debe tener 3 ligaduras, que deben escogerse con cuidado



- El modelo bidimensional puede tener más de 3 condiciones de ligadura, en cuyo caso se trataría de un sistema hiperestático.

- Los elementos unidimensionales clásicos son el elemento barra y el elemento viga

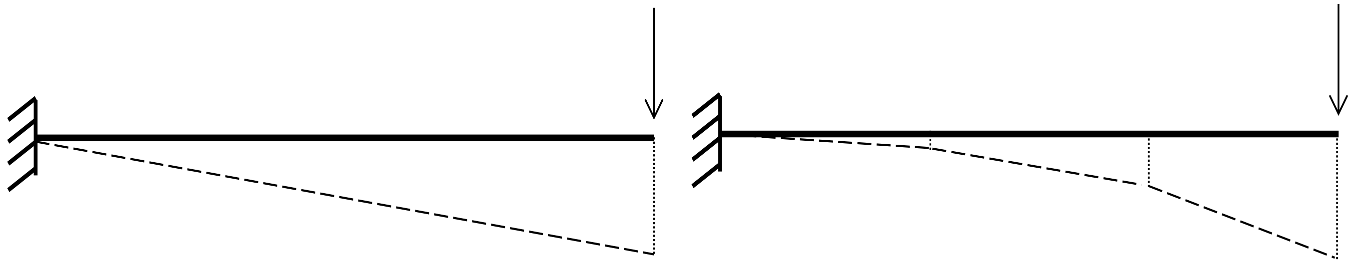
- Cada barra de una estructura se debe mallar con un único elemento barra:



A tracción, el resultado es el mismo con una que con tres barras (pero el coste con una barra es menor)

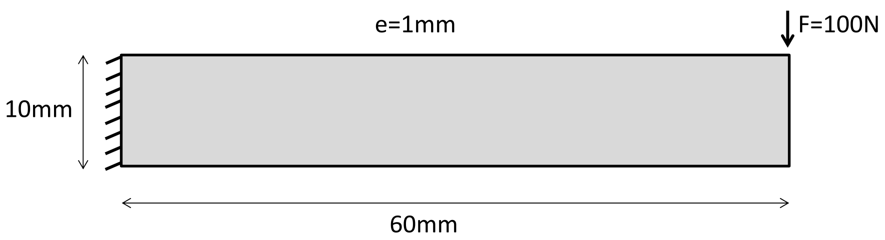
A compresión, con tres barras existe movimiento de sólido rígido

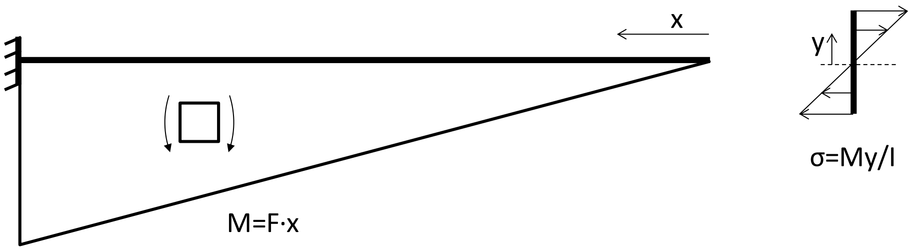
- Cada viga de una estructura puede mallarse con un único elemento viga, , porque el procesador de EF usa directamente la teoría de vigas para el cálculo de la matriz de rigidez,
- Si se desea conocer la respuesta de la estructura en localizaciones particulares, se han de dividir los elementos viga de tal forma que en dichas localizaciones existan nodos.



- Los elementos bidimensionales convencionales clásicos son el elemento triángulo y el elemento cuadrilátero
- El cálculo de la matriz de rigidez de un triángulo no necesita integración, mientras que el de un cuadrilátero sí (integración directa si es rectangular, numérica si no lo es).
- Mallar superficies irregulares es más sencillo con triángulos, pero son elementos de tensión constante y por tanto no recomendables para mallar zonas con variaciones de tensión.

- Supóngase que se quiere analizar una viga empotrada con una carga puntual vertical en su extremo. El material es acero, de propiedades resistentes E=200GPa, y ν=0.3.

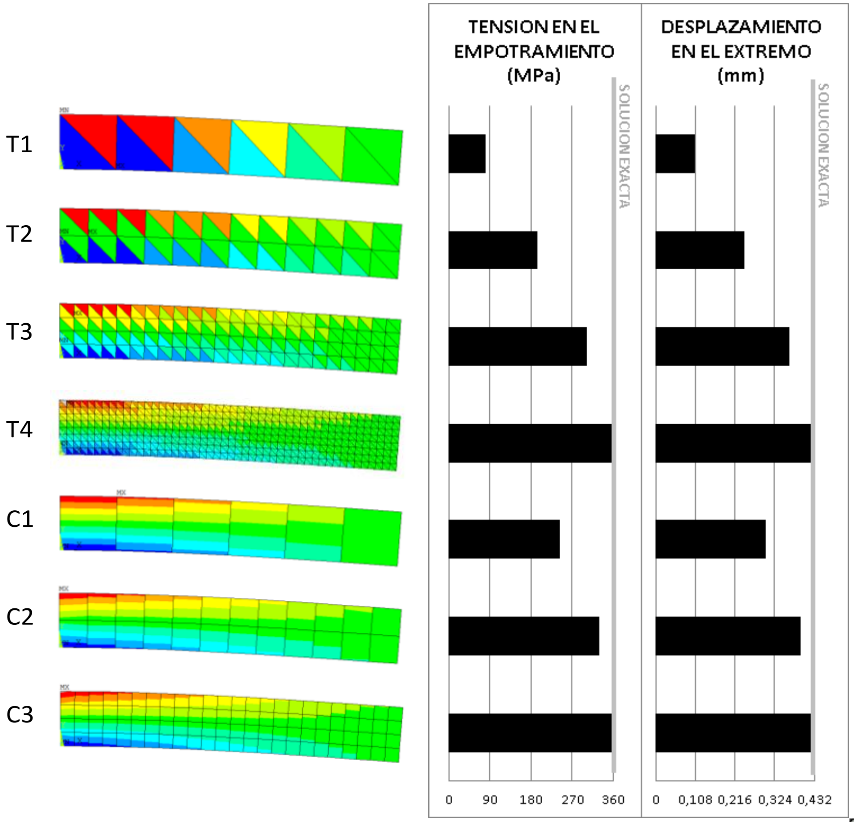




$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{100 \cdot 60 \cdot 5}{{}^{1}/_{12} \cdot 1 \cdot 10^3} = 360\ MPa \qquad \delta_{max} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{100 \cdot 60^3}{3 \cdot 200000 \cdot {}^{1}/_{12} \cdot 1 \cdot 10^3} = 0.432\ mm$$

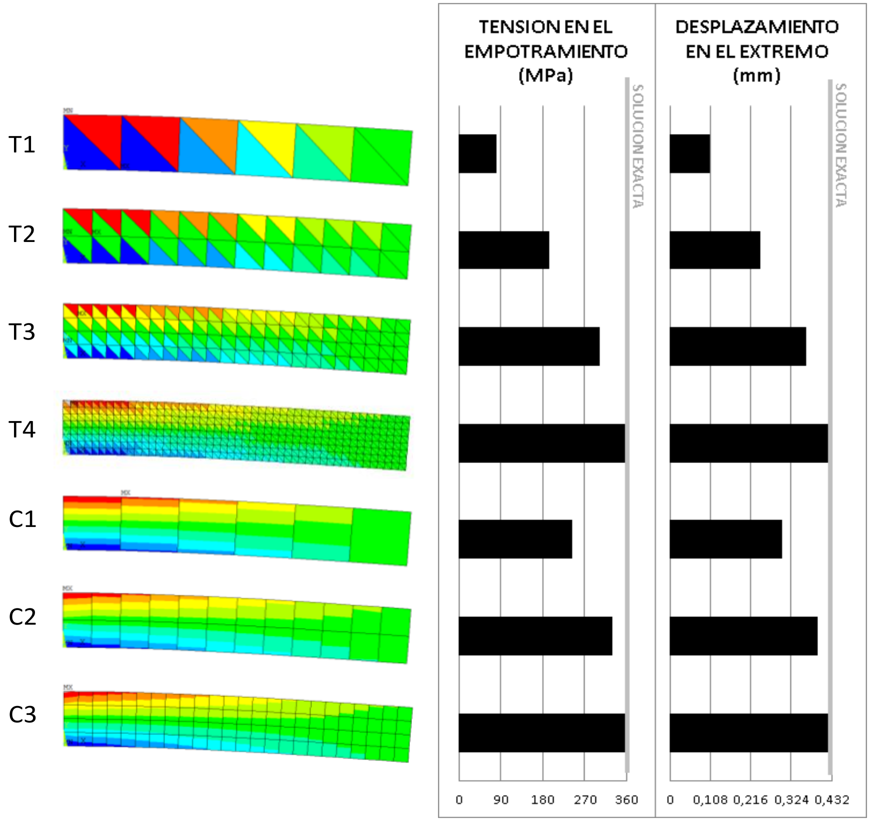
- Se observa que la tensión en la barra varía linealmente tanto en la dirección longitudinal x como en la dirección transversal y.

- Para realizar este análisis con un modelo EF lo lógico es utilizar elementos viga, pero se quiere comparar los resultados de elementos triángulo y cuadrilátero



Mapas de colores: tensión normal en cada punto del modelo
Gráficos: tensión y deformación VS solución exacta

- Para realizar este análisis con un modelo EF lo lógico es utilizar elementos viga, pero se quiere comparar los resultados de elementos triángulo y cuadrilátero



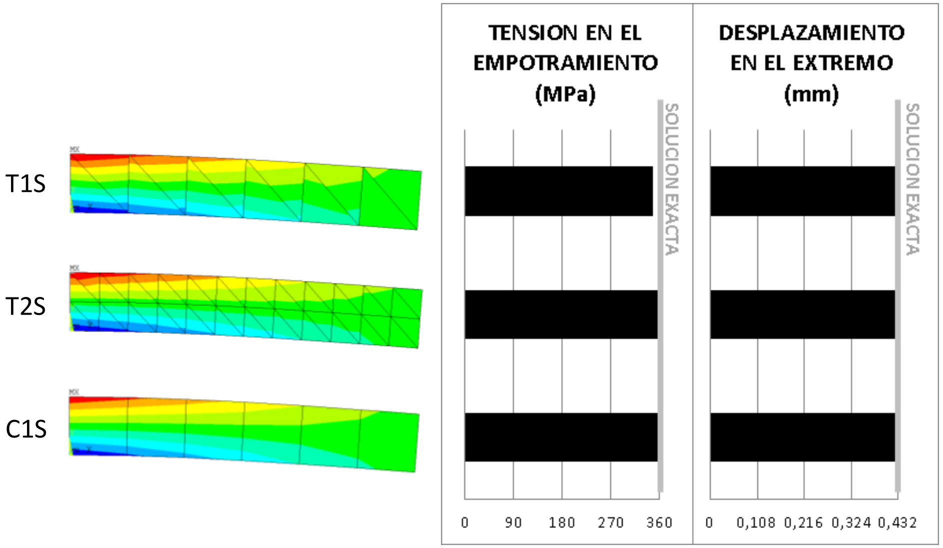
T1: al ser elementos de tensión constante, el modelo no simula la variación lineal de tensiones en direcciones x y y, y la precisión en tensiones y desplazamientos es del 25%

T2, T3, T4: si se utilizan cada vez más elementos se obtienen cada vez resultados más exactos

C1: al ser elementos de tensión lineal, simula correctamente la variación lineal de tensiones en dirección y, pero no en dirección x. La precisión es inferior al 75%, pero mucho mejor que en T1

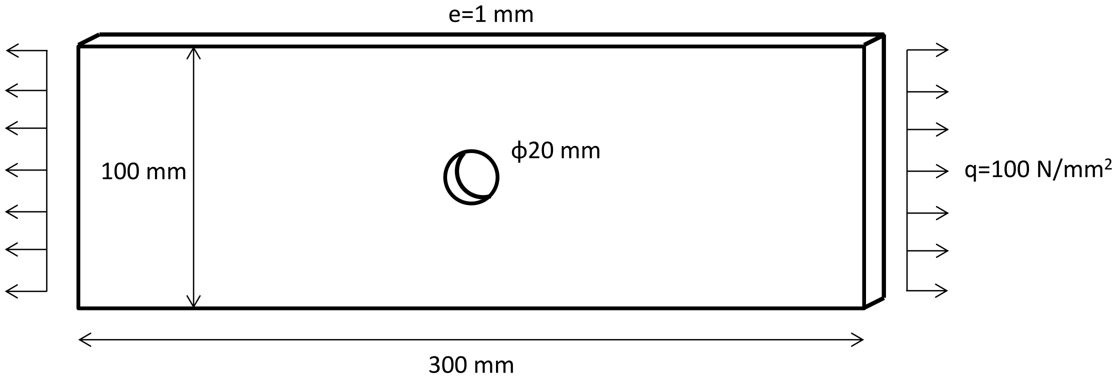
C2, C3: si se utilizan cada vez más elementos se obtienen cada vez resultados más exactos.

- En conclusión, para piezas o zonas con variaciones de tensión, es mejor usar cuadriláteros que triángulos, porque dan mayor precisión con menos elementos y por tanto menos coste
- Una alternativa es usar elementos de orden superior, que tienen nodos también en la mitad de los lados:
  - Sus funciones de interpolación son más complejas y tienen mayor capacidad de captar variaciones de desplazamientos y tensiones en su interior
  - a cambio tienen más coste de análisis al tener más nodos y por tanto más grados de libertad
- Los elementos triángulos de segundo orden ya no son elementos de tensión constante



T1S: los elementos triángulo de segundo orden no son de tensión constante, y por tanto proporcionan aun con pocos elementos un muy buen resultado en este caso

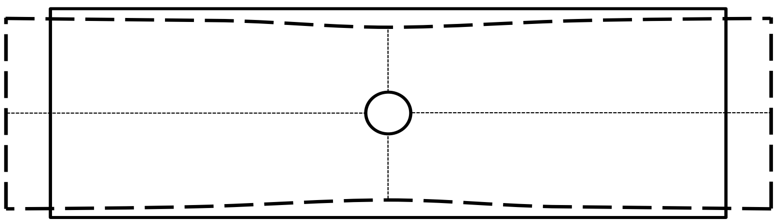
- Se explica el análisis por EF de una chapa perforada sometida a tracción y de espesor uniforme 1 mm. El material es acero, con E=210 GPa y ν=0.3.

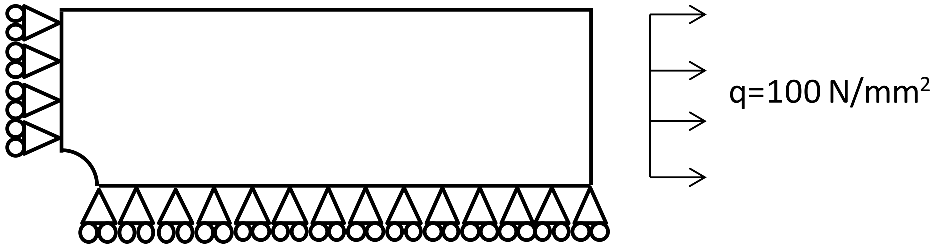


- La pieza cumple las condiciones de tensión plana, por tanto se modeliza en 2D (área rectangular con agujero circular) y se malla con elementos triángulo y/o cuadrilátero.

- Se puede prever que si se divide la chapa en cuatro cuadrantes, todos tendrán la misma respuesta. Así, se analizará un solo cuadrante dividiendo por cuatro el número de grados de libertad, consiguiendo ahorro de coste sin pérdida de precisión

- Los puntos de la línea de simetría horizontal sólo se desplazarán en horizontal, y los puntos de la línea de simetría vertical se desplazarán en vertical. Así, el modelo tendrá las condiciones de contorno de la figura.





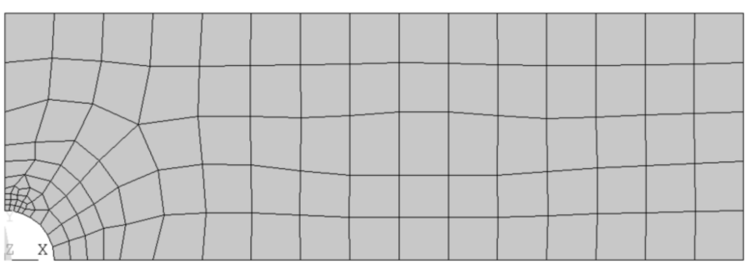
- La pieza se malla con triángulos y cuadriláteros de primer orden.

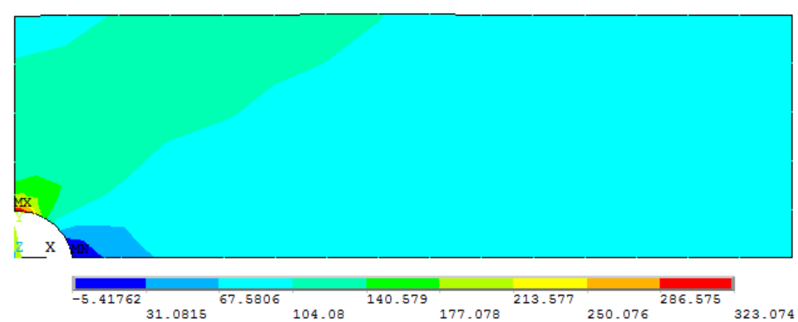
- ANSYS® advierte que los elementos triángulo son muy rígidos a flexión (ver ejemplo anterior de la viga); además son de tensión constante, no recomendables para zonas de pieza con variaciones de tensión.

- Por ello, ANSYS® recomienda usar elementos de segundo orden (triángulos de 6 nodos o cuadrilátero de 8 nodos) en su lugar.

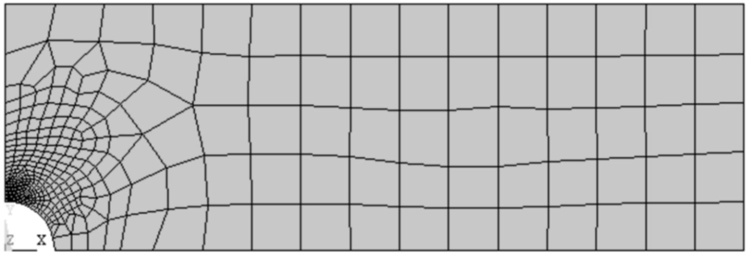
- El modelo presenta un mapa de tensiones fácilmente previsible. La tensión normal tendrá una distribución uniforme excepto en la parte superior del agujero

- Por tanto toda la geometría se malla con elementos de gran tamaño, excepto en la zona superior del agujero, donde se usan elementos de menor tamaño o de orden superior





- Para saber si se ha refinado lo suficiente, se puede rehacer el análisis con una malla aún más refinada (elementos de menor tamaño)



- Los resultados resultan ser casi idénticos a los de la malla anterior, por tanto no ha merecido la pena refinar (es un modelo menos eficiente, mismos resultados a mayor coste)

- El analista elige el tamaño de la malla en base a su experiencia, buscando buena precisión a coste asumible. Si no se tiene experiencia previa, lo habitual es hacer varios análisis con distintos tamaños de malla hasta dar con un modelo óptimo

- Muchos programas tienen implementados algoritmos de mallado adaptativo, que refinan la malla automáticamente hasta llegar a un mallado adecuado sin intervención del usuario:
  - Se parte de un mallado con elementos de gran tamaño, y se analiza la pieza. A partir de los resultados, el programa calcula el error asociado a la malla y la refina donde éste sea superior a un valor límite prefijado
  - Se repite el proceso hasta que toda la malla tenga un error admisible. En esta situación, la malla puede ser considerada adecuada y los resultados precisos.
- La eficacia del mallado adaptativo depende del estimador de error utilizado; actualmente los más empleados se basan en aspectos de la energía de deformación.

- Al refinar la malla, se ha optado por utilizar elementos de menor tamaño; esta estrategia de refinado se conoce como "línea h".
- Existe otra alternativa, la "línea p", que en vez de reducir el tamaño de los elementos, aumenta su orden.
- Generalmente los programas están más enfocados a utilizar la línea h, pero ambas son válidas, de hecho pueden combinarse en sucesivas etapas de refinado.