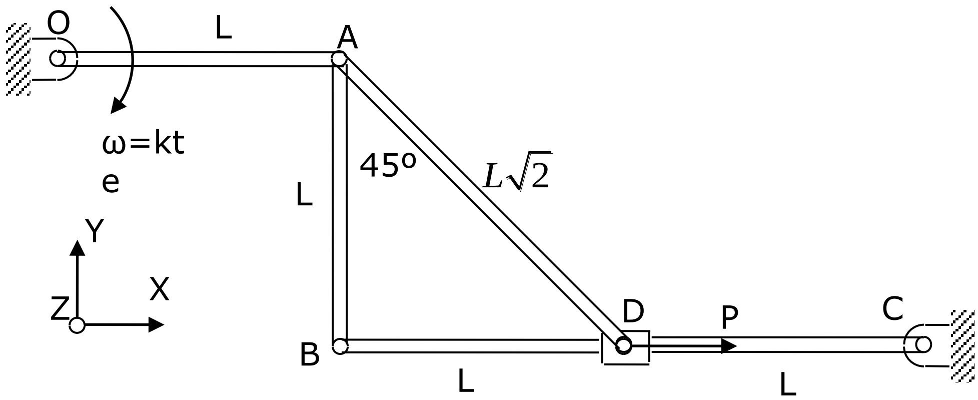
6. GAIA. DINAMIKAKO PROBLEMA ZINETOSTATIKOA

6.1 PROBLEMA 6.1

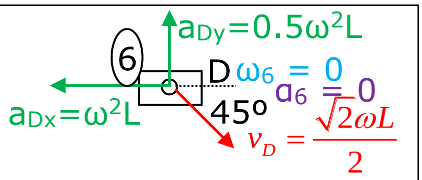
6.1.1 ENUNTZIATUA

Irudiko mekanismoan kalkulatu OA barran aplikatu behar den momentu eragilea **M**, irudiko aldiunean OA barra **ω** abiadura angeluar konstantez erlojuaren orratzen alde higitzeko, D irristailuan **P** indar horizontala aplikatuta dagoela kontuan hartuz.

Oharra: Mekanismoa plano horizontalean dago eta D irristailua m masakoa da. Beste elementuen masak mespretxagarriak dira.



6.1.2 EBAZPENA

AZTERKETA ZINEMATIKOA	

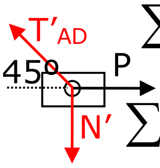
POTENTZI BIRTUALEN METODOA

$\vec{M}\cdot\vec{\omega}+\vec{P}\cdot\vec{v_D}+(-m\vec{a_D})\cdot\vec{v_D}+(-I_{G6}\vec{\alpha_6})\cdot\vec{\omega_6}=0$ non $I_{G6}=0$, $\omega_6=0$, $\alpha_6=0$

$$M\cdot\omega\cos180^o+Pv_D\cos45^o-m(a_{Dx}v_{Dx}+a_{Dy}v_{Dy})=0$$

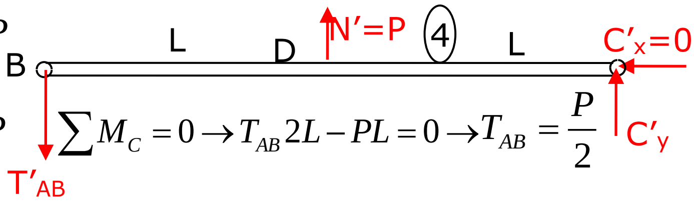
$$-M\cdot\omega+P\frac{\omega L}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}-m(-\omega^2 L\frac{\omega L}{2}-\frac{\omega^2 L}{2}\frac{\omega L}{2})=0 \quad \boxed{M=\frac{PL}{2}+\frac{3}{4}m\omega^2 L^2}$$

AZTERKETA ESTATIKO HUTSA (KANPO-AKZIOAK)

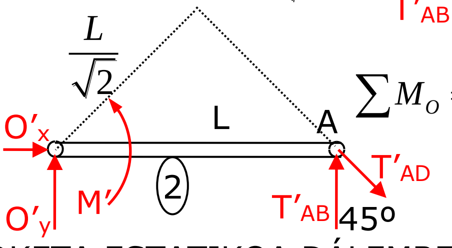


$$\sum F_x = 0 \to T'_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} = P$$

$$\sum F_y = 0 \to T'_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} = P$$



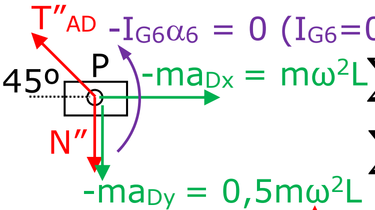
$$\sum M_C = 0 \to T_{AB}2L - PL = 0 \to T_{AB} = \frac{P}{2}$$



$$\sum M_O = 0 \to M' + T'_{AB}L - T'_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

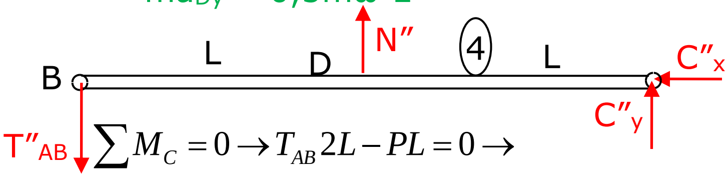
$$M' = \left(T'_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} - T'_{AB}\right)L \to M' = \frac{PL}{2}$$

AZTERKETA ESTATIKOA DÁLEMBERT (INERTZIA-AKZIOAK)

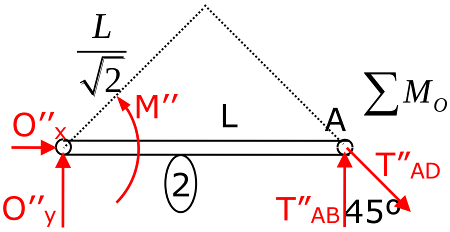


$$\sum F_x = 0 \to -T''_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} + m\omega^2 L = 0 \to T''_{AD} = \sqrt{2}m\omega^2 L$$

$$\sum F_y = 0 \to T''_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} - N'' - 0,5m\omega^2 L = 0 \to N'' = \frac{m\omega^2 L}{2}$$



$$\sum M_C = 0 \to T_{AB}2L - PL = 0 \to \qquad T''_{AB} = \frac{N}{2}$$



$$\sum M_O = 0 \to M'' + T''_{AB}L - T''_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$M'' = \left(T''_{AD}\frac{1}{\sqrt{2}} - T''_{AB}\right)L \to M'' = \frac{3}{4}m\omega^2 L^2$$

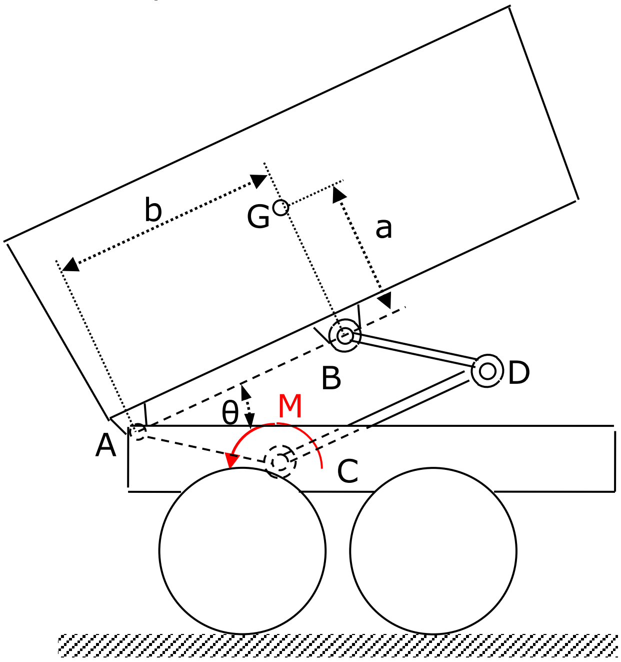
GAINJARPENA: $\boxed{\vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}'' = \left(\frac{PL}{2} + \frac{3}{4}m\omega^2 L^2\right)\vec{k}}$

Azalpena: Honako bi bideak erabiliz lortu da momentu eragilea.
1. bidean potentzi birtualen metodoa erabili da.
2. bidean dinamikako problema zinetostatikoa honako bi azpiproblemen baturan deskonposatzen da: bata problema estatiko hutsa (inertzia-terminorik gabe) eta bestea inertzia-indarrak eta inertzia-momentuak kontuan hartzen dituena. Momentu eragile osoa problema bakoitzarekin lotutako momentuen batura izango da.

6.2 PROBLEMA 6.2

6.2.1 ENUNTZIATUA

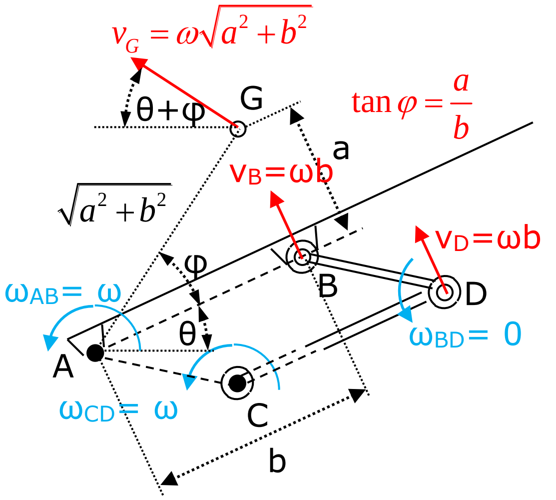
Irudian iraulki altxatzeko mekanismoa agertzen da iraulkiak horizontalarekiko θ angelua osatzen duen aldiunean. Irudiko aldiunean CD barra ω abiadura angeluarrez eta α azelerazio angeluarrez higitzeko, kalkulatu beharrezko **M** momentu eragilea, kontuan hartuz iraulkiaren masa m eta bere inertzia-momentua bere G grabitate-zentroarekiko I_G dela. CD eta DB barren masak mespretxagarriak direla konstsideratzen da.
Oharra: Gomendatzen da potentzi birtualen metodoa erabiltzea



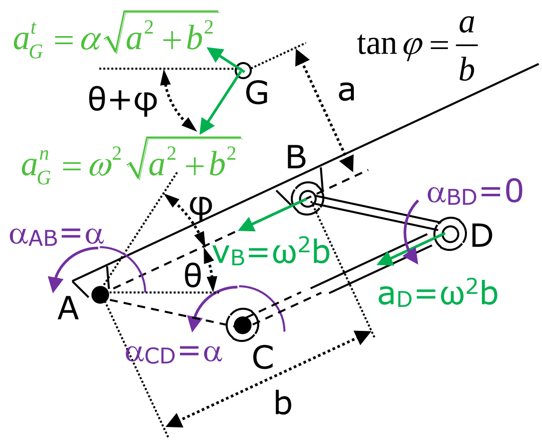
6.2.2 EBAZPENA

AZTERKETA ZINEMATIKOA

c) ABIADURAK



d) AZELERAZIOAK



c) POTENTZI BIRTUALEN METODOA

$m\vec{g}\cdot\vec{v}_G + \vec{M}\cdot\vec{\omega}_2 + (-m\vec{a}_G)\cdot\vec{v}_G + (-I_{G4}\vec{\alpha}_4)\cdot\vec{\omega}_4 = 0$ non $I_{G4} = I_G$,

$-mg\cdot\omega\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi) + M\cdot\omega - m\alpha\left(a^2+b^2\right)\omega - I_G\alpha\omega = 0$

$\boxed{M=mg(b\cos\theta-a\sin\theta)+\alpha[m(a^2+b^2)+I_G]}$

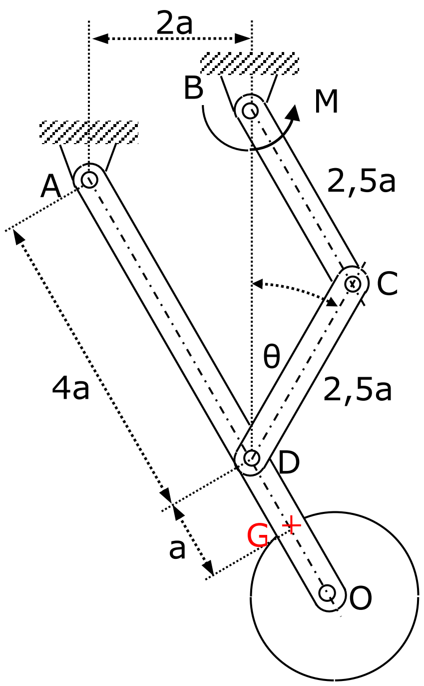
Oharra: Potentzi birtualen metodoa erabiliz ebatzi da problema.

6.3 PROBLEMA 6.3

6.3.1 ENUNTZIATUA

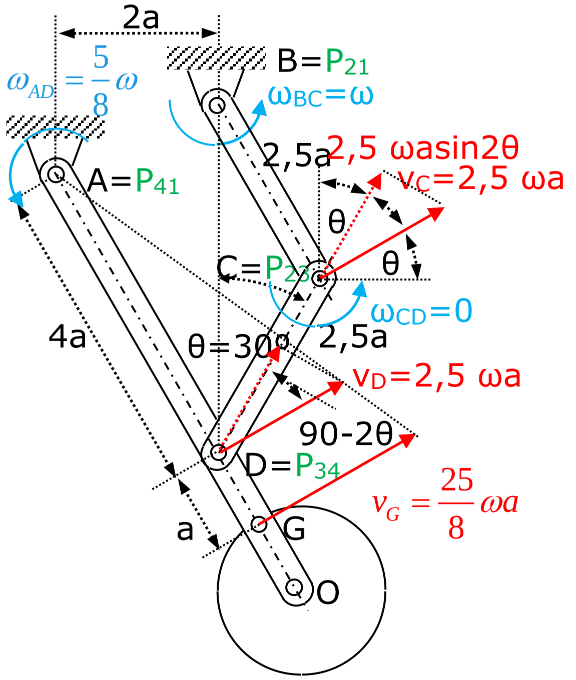
Irudian hegazkin baten aurreko lurreratze-trena erakusten da. AO besoak eta gurpilak osaturiko multzoak **m** masa du eta masa honen grabitate-zentroa G puntuan dago eta bere Grekiko inertzia-momentua $\mathbf{I_G}$ da. BC eta CD barren masak mespretxagarriak dira. Irudiko aldiunean, B eta D zuzen bertikal berean daude eta θ = 30º da. Irudiko aldiunean kalkulatu beharrezko M momentu eragilea BC barra **ω** abiadura angeluar konstantez (erlojuaren orratzen kontrakoa) higitzeko.

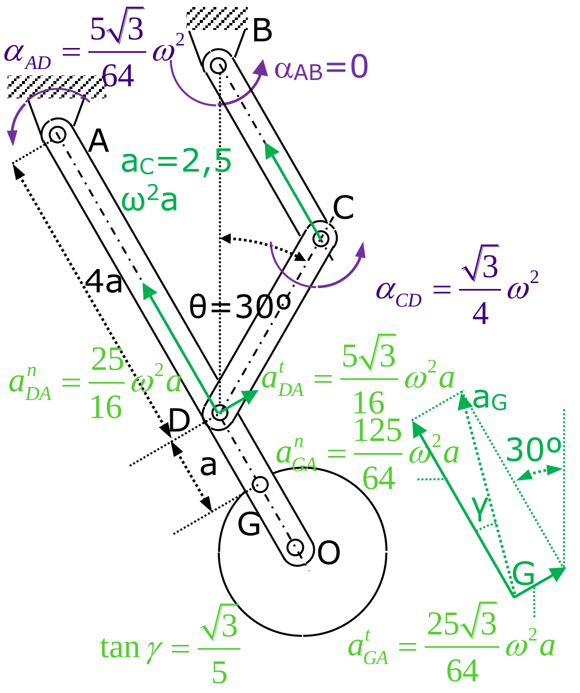
Oharra: M-ren kalkulua egiteko Potentzi birtualen metodoa erabiltzea gomendatzen da eta gero Gainjarpen printzipioa erabiliz aurreko M-ren balioa baieztatzea.



6.3.2 EBAZPENA

ABIADUREN ETA AZELERAZIOEN KALKULUA





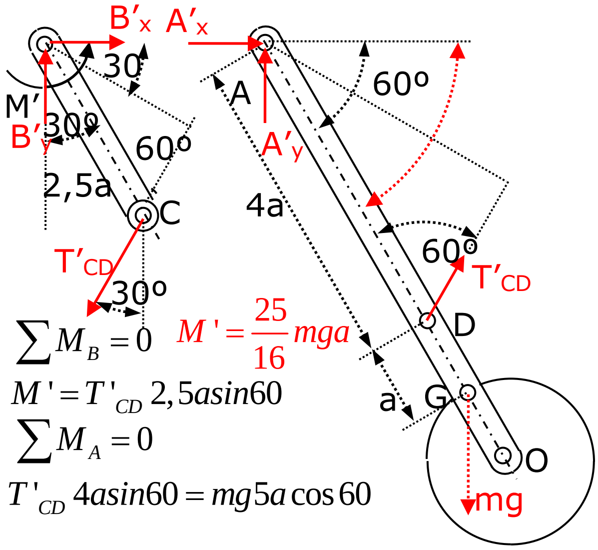
POTENTZI BIRTUALEN METODOA

$$\vec{M}\cdot\vec{\omega}+m\vec{g}\cdot\vec{v_G}+(-m\vec{a_G})\cdot\vec{v_G}+(-I_G\vec{\alpha_{AD}})\cdot\vec{\omega_{AD}}=0$$

$$M\omega-\frac{25}{16}mga\omega-m\frac{625}{512}\sqrt{3}\omega^2a^2\omega-I_G\frac{25}{512}\omega^2\omega=0$$

$$\boxed{M=\frac{25}{16}mga+\frac{25\sqrt{3}}{512}\omega^2\left(I_G+m25a^2\right)}$$

GAINJARPENA = ESTATIKO HUTSA + ESTATIKO D'ALEMBERT

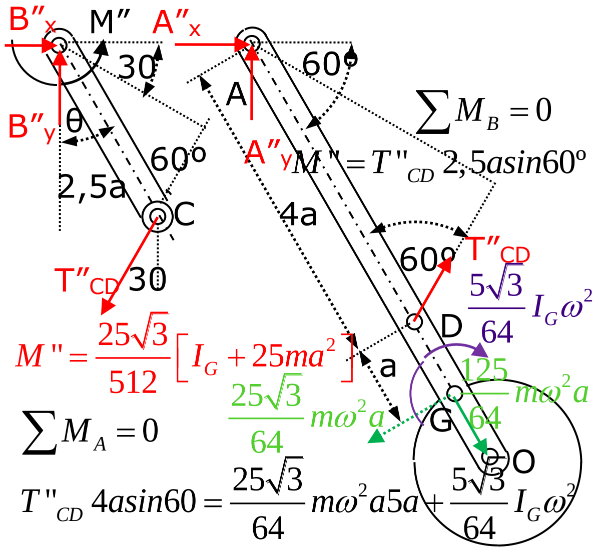


$$\sum M_B = 0 \quad M' = \frac{25}{16} mga$$

$$M' = T'_{CD}\, 2{,}5a\sin 60$$

$$\sum M_A = 0$$

$$T'_{CD}\, 4a\sin 60 = mg5a\cos 60$$



$$\sum M_B = 0$$

$$M'' = T''_{CD}\, 2{,}5a\sin 60^{\circ}$$

$$M'' = \frac{25\sqrt{3}}{512}\left[I_G + 25ma^2\right]$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{64} I_G\omega^2 \qquad \frac{125}{64} m\omega^2 a \qquad \frac{25\sqrt{3}}{64} m\omega^2 a$$

$$\sum M_A = 0$$

$$T''_{CD}\, 4a\sin 60 = \frac{25\sqrt{3}}{64} m\omega^2 a5a + \frac{5\sqrt{3}}{64} I_G\omega^2$$

GAINJARPENA: $M = M' + M''$

$$\boxed{M = \frac{25}{16} mga + \frac{25\sqrt{3}}{512}\omega^2\left(I_G + m25a^2\right)}$$

Azalpena: Honako bi bideak erabiliz lortu da momentu eragilea.

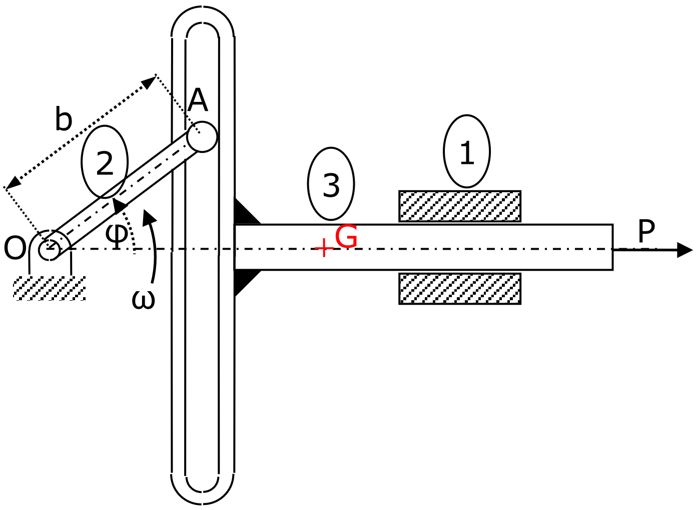
1. bidean potentzi birtualen metodoa erabili da.

2. bidean Dinamikako problema zinetostatikoa honako bi azpiproblemen baturan deskonposatzen da: bata problema estatiko hutsa (inertzia-terminorik gabe) eta bestea inertzia-indarrak eta inertzia-momentuak kontuan hartzen dituena. Momentu eragile osoa izango da problema bakoitzarekin lotutako momentuen batura.

6.4 PROBLEMA 6.4

6.4.1 ENUNTZIATUA

Irudian plano horizontalean dagoen uztarri eskoziarra erakusten da. Irudiko aldiunean OA barrak φ angelu horizontalarekiko osatzen du eta **ω** abiadura angeluar konstantez (erlojuaren orratzen kontrakoa) higitzen da. (3) elementuan eskubirantz eragiten du **P** indarrak. (3) elementuaren masa **m** da eta bere grabitate-zentroa G puntuan dago eta OA barraren masa mespretxagarria da. Aipaturiko higidura egoteko kalkulatu O puntuan beharrezko **M** momentu eragilea.



6.4.2 EBAZPENA

AZTERKETA ZINEMATIKOA $\overrightarrow{\omega_2} = \omega\vec{k} = kte$

$\overrightarrow{v_3} = \omega L sin\varphi \leftarrow$ $\overrightarrow{a_3} = \omega^2 b\cos\varphi + \alpha b\cos\varphi \leftarrow$ (α=0): $\overrightarrow{a_3} = \omega^2 b\cos\varphi \leftarrow$

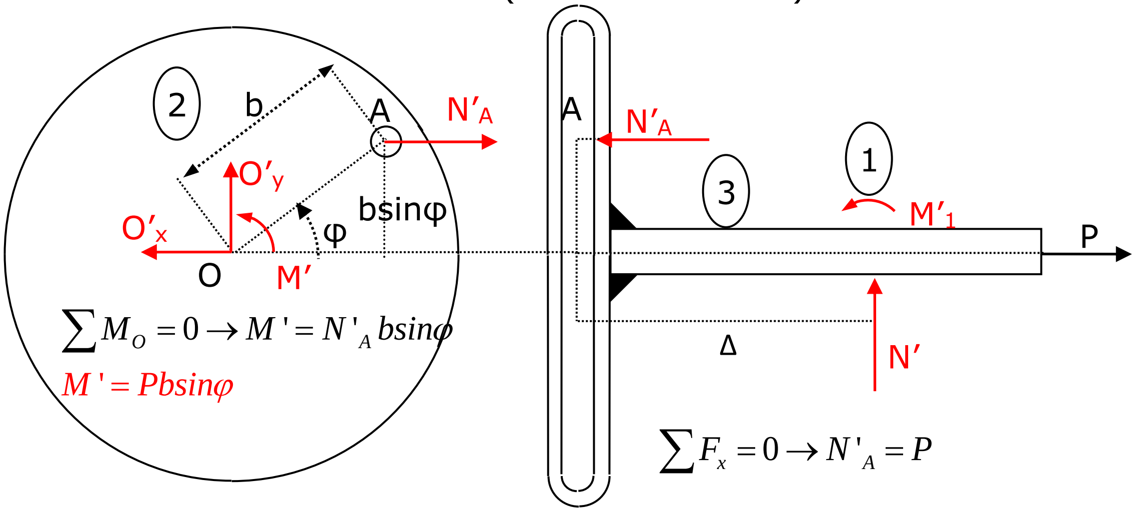
POTENTZI BIRTUALEN METODOA

$\overrightarrow{M}\cdot\vec{\omega} + \vec{P}\cdot\overrightarrow{v_3} + (-m\overrightarrow{a_3})\cdot\overrightarrow{v_3} + (-I_{G3}\overrightarrow{\alpha_3})\cdot\overrightarrow{\omega_3} = 0$ non $I_{G3} = 0$, $\omega_3 = 0$, $\alpha_3 = 0$

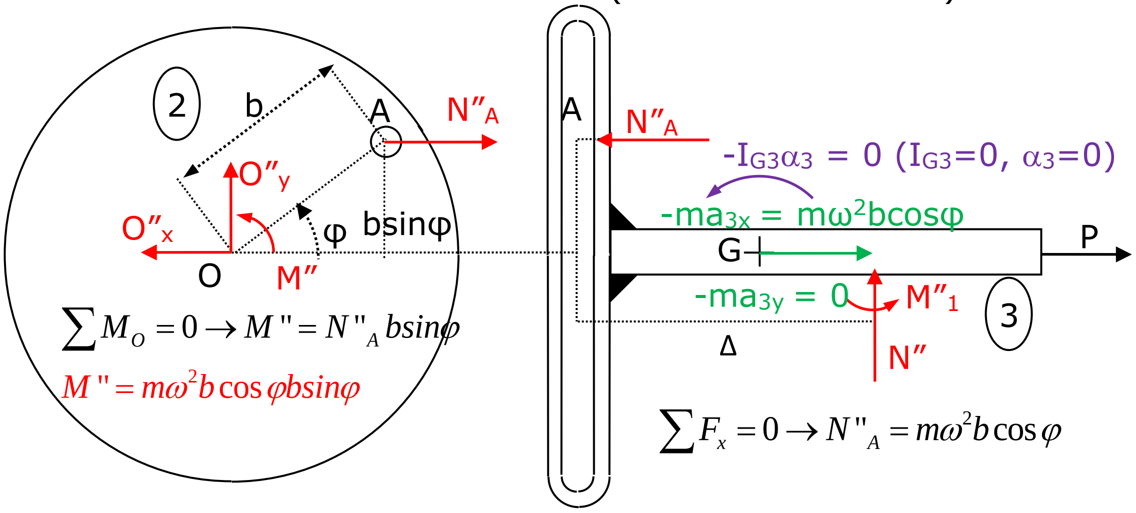
$M\cdot\omega - P\cdot bsin\varphi - m\omega^2 b\cos\varphi\cdot bsin\varphi + 0 = 0$

$\boxed{M = Pbsin\varphi + m\omega^2 b^2\cos\varphi sin\varphi}$

AZTERKETA ESTATIKO HUTSA (KANPO-AKZIOAK)



AZTERKETA ESTATIKOA DÁLEMBERT (INERTZIA-AKZIOAK)



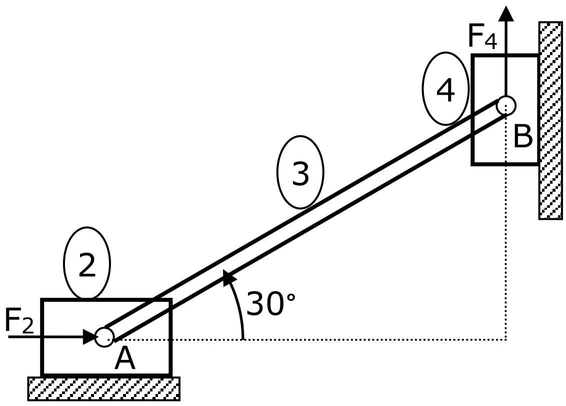
GAINJARPENA: $\boxed{M = Pbsin\varphi + m\omega^2 b^2\cos\varphi sin\varphi}$

Oharra: Aurreko problemetako bi bideak erabili dira ebazpenean.

6.5 PROBLEMA 6.5

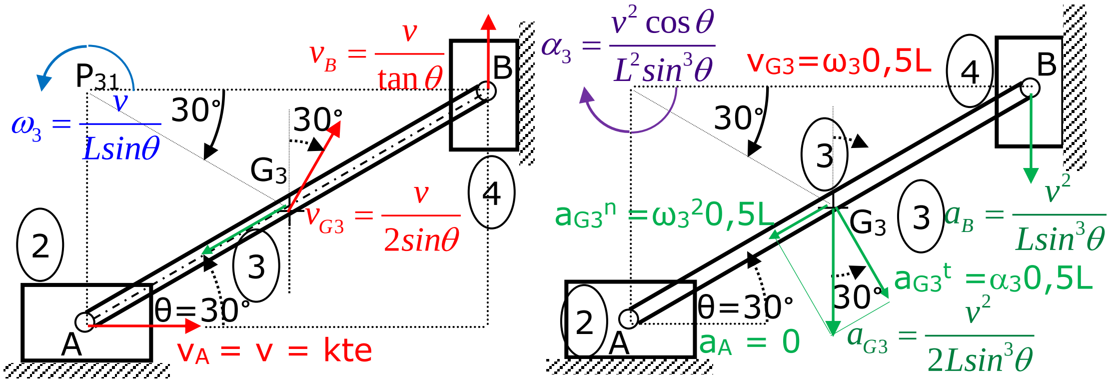
6.5.1 ENUNTZIATUA

Irudian 0,5 m luzera eta 9 kg masa dituen AB barra uniformea eta argala erakusten da. AB-ren muturrak bi zuzenetan zehar higitzen dira, zuzen hauek elkarren artean elkartzuta izanik. Irudiko kokapenean A puntuan F_2 = 300 N eskubirantz aplikatzen denean, A puntua eskubirantz higitzen da 1,8 ms^{-1} abiadura konstantez. 2 eta 4 barren masak mespretxagarriak direla kontsideratzen da.
Mekanismoa plano horizontal batean kokatua dagoela kontuan hartuz, aipatutako egoera zinematikoa lortu ahal izateko B puntuan aplikatu behar den indar bertikala kalkulatu.



6.5.2 EBAZPENA

AZTERKETA ZINEMATIKOA $\vec{v}_A = v\vec{i} = kte$



POTENTZI BIRTUALEN METODOA

$$\vec{F}_2\cdot\vec{v}_A + (-m\vec{a}_3)\cdot\vec{v}_{G3} + (-I_{G3}\vec{\alpha}_3)\cdot\vec{\omega}_3 + \vec{F}_4\cdot\vec{v}_B = 0$$

$$F_2 v + m_3\left(\frac{v^2}{2Lsin^3\theta}\frac{v}{2sin\theta}\cos\theta\right) + \frac{m_3L^2}{12}\frac{v^2\cos\theta}{L^2sin^3\theta}\cdot\frac{v}{Lsin\theta} + F_4\cdot\frac{v}{\tan\theta} = 0$$

$$\boxed{F_4 = -\left[F_2\tan\theta + \frac{m_3v^2}{L}\left(\frac{1}{3sin^3\theta}\right)\right]} \text{ -> } F_4 = -328,7N \text{ -> } \boxed{\vec{F}_4 = 328,7N\downarrow}$$

GAINJARPENA =ESTATIKO HUTSA + ESTATIKO (D'ALEMBERT)

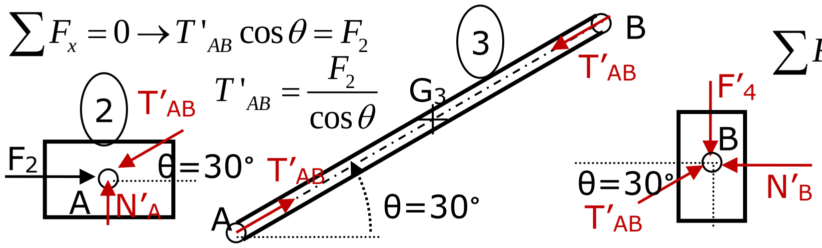
ESTATIKO HUTSA

$\sum F_x = 0 \rightarrow T'_{AB}\cos\theta = F_2$

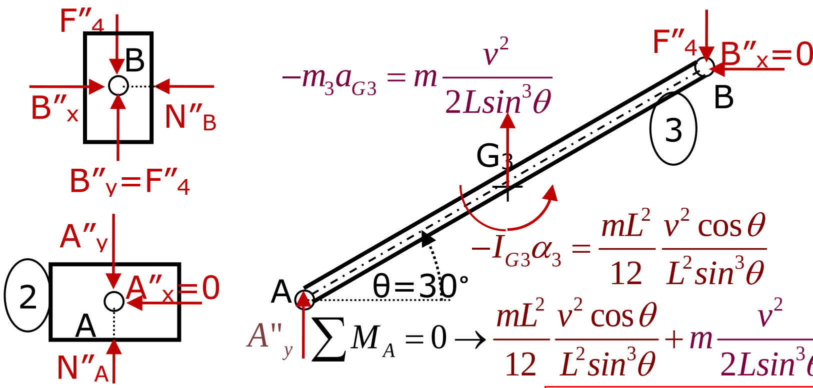
$T'_{AB} = \frac{F_2}{\cos\theta}$

$\sum F_y = 0 \rightarrow T'_{AB}sin\theta = F'_4$

$F'_4 = F_2\tan\theta$



ESTATIKOA (D'ALEMBERT)



$$F''_4 = \frac{mv^2}{L}\frac{1}{3sin^3\theta}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \frac{mL^2}{12}\frac{v^2\cos\theta}{L^2sin^3\theta} + m\frac{v^2}{2Lsin^3\theta}\frac{L}{2}\cos\theta - F''_4 L\cos\theta = 0$$

GAINJARPENA => $F_4 = F'_4 + F''_4 \rightarrow \boxed{F_4 = F_2\tan\theta + \frac{mv^2}{L}\frac{1}{3sin^3\theta}}$

6.6 PROBLEMA 6.6

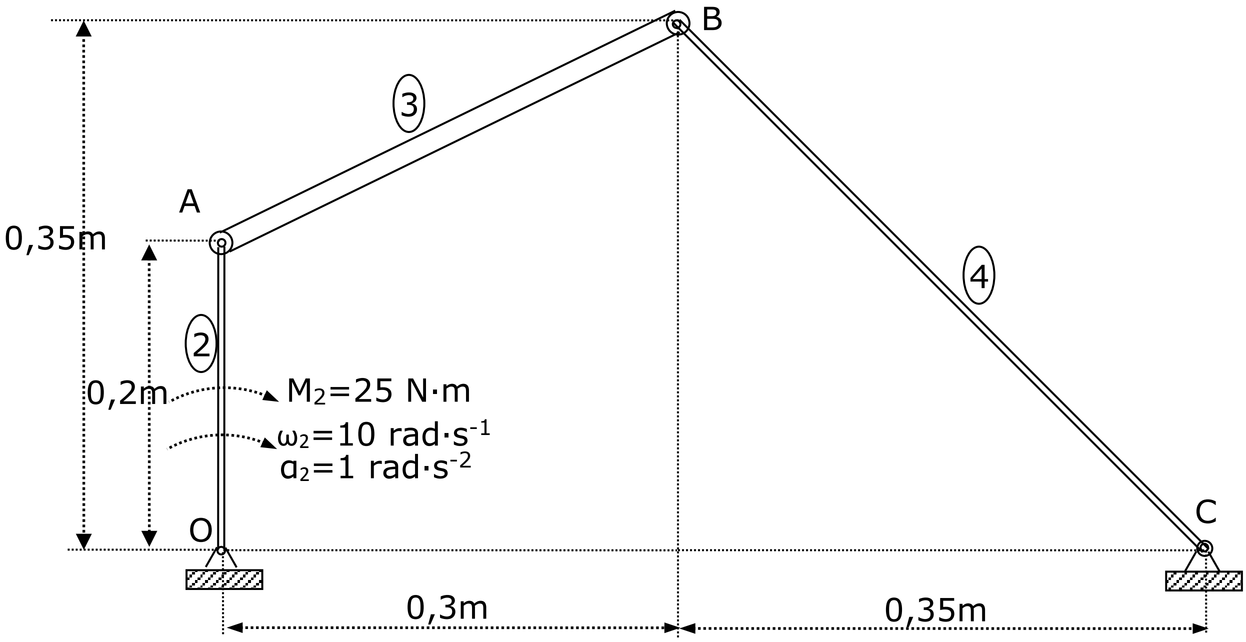
6.6.1 ENUNTZIATUA

Irudiko lauki giltzatua plano horizontalean dago. AB barrak 2 kg-ko masa uniformeki banatua dauka eta (2) eta (4) barren masak mespretxagarriak dira. Irudiko aldiunean OA barra M_2 = 25 N·m momentua jasaten ari da eta ω_2 = 10 rads^{-1} abiadura angeluarrez eta α_2 = 1 rad s^{-2} azelerazio angeluarrez higitzen ari da. Kalkulatu:

a) AB barraren abiadura angeluarra eta bere grabitate-zentroaren abiadura.

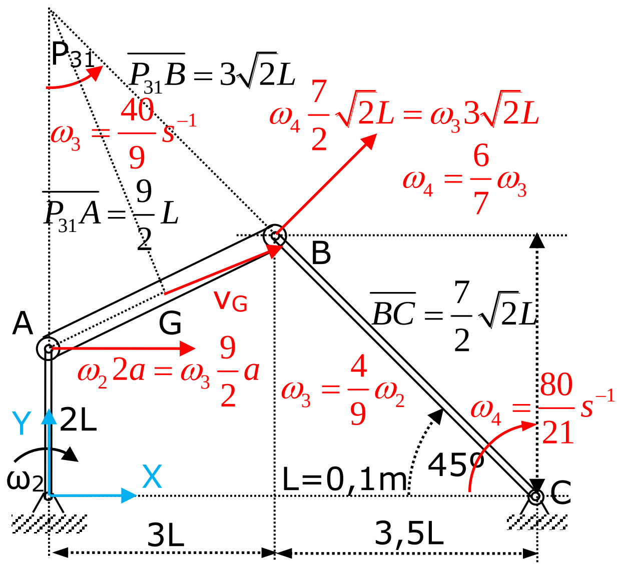
b) AB barraren azelerazio angeluarra eta bere grabitate-zentroaren azelerazioa

c) BC barran aplikaturiko M_4 momentua mekanismoa oreka dinamikoan egon dadin.



6.6.2 EBAZPENA

ABIADURAK



$$\overrightarrow{v_G}=\overrightarrow{v_{P31}}+\overrightarrow{\omega_3}\times\overrightarrow{P_{31}G}$$

$$\overrightarrow{v_G}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \frac{4}{9}\omega_2 \\ \frac{3L}{2} & \frac{-15L}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

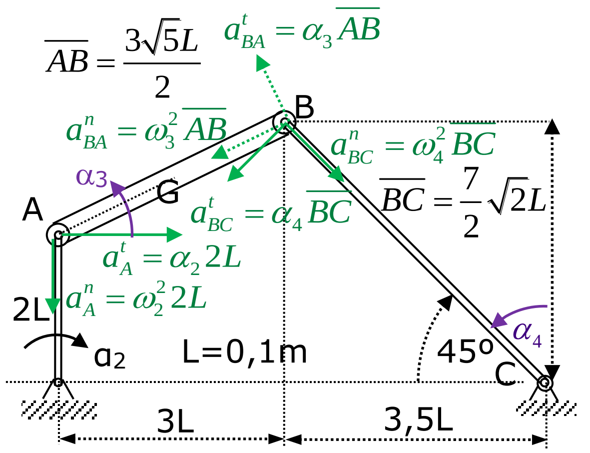
$$\overrightarrow{v_G}=\frac{\omega_2 L}{3}\left[5\vec{i}+2\vec{j}\right]$$

$$v_{Gx}=1,66\,ms^{-1}$$

$$v_{Gy}=0,66\,ms^{-1}$$

B

AZELERAZIOAK



$$\overrightarrow{a_C}+\overrightarrow{a_{BC}^{n}}+\overrightarrow{a_{BC}^{t}}=\overrightarrow{a_A^{n}}+\overrightarrow{a_A^{t}}+\overrightarrow{a_{BA}^{n}}+\overrightarrow{a_{BA}^{t}}$$

$$\alpha_3=\frac{2}{9}\left[-7\omega_4^2+\left(\alpha_2+\omega_2^2\right)2L-1,5\omega_3^2\right]$$

$$\alpha_3=15,73s^{-2}$$

$$\overrightarrow{a_G}=\overrightarrow{a_A^{n}}+\overrightarrow{a_A^{t}}+\overrightarrow{a_{GA}^{n}}+\overrightarrow{a_{GA}^{t}}$$

$$\alpha_3=\frac{2}{9}\left[-7\omega_4^2+\left(\alpha_2+\omega_2^2\right)2L-1,5\omega_3^2\right]$$

$$a_{Gx}=\alpha_2 2L-\omega_3^2\frac{3L}{2}-\alpha_3\frac{3L}{4}=-3,94ms^{-2}$$

$$a_{Gy}=-\omega_2^2 2L-\omega_3^2\frac{3L}{4}+\alpha_3\frac{3L}{2}=-19,1ms^{-2}$$

POTENTZI BIRTUALEN METODOA

$$\overrightarrow{M_2}\cdot\overrightarrow{\omega_2}+m\vec{g}\cdot\overrightarrow{v_G}+(-m_3\overrightarrow{a_G})\cdot\overrightarrow{v_G}+(-I_{G3}\overrightarrow{\alpha_3})\cdot\overrightarrow{\omega_3}+\overrightarrow{M_4}\cdot\overrightarrow{\omega_4}=0$$

$$M_2\omega_2-m_3\left(a_{Gx}v_{Gx}+a_{Gy}v_{Gy}\right)-I_{G3}\alpha_3\omega_3-M_4\omega_4=0$$

$$M_2\omega_2-m_3\frac{\omega_2 L}{3}\left(5a_{Gx}+2a_{Gy}\right)-\frac{m_3}{12}\frac{45L^2}{4}\alpha_3\frac{4}{9}\omega_2-M_4\frac{8}{21}\omega_2=0$$

$$\boxed{M_4=\frac{21}{8}\left[M_2-\frac{m_3}{3}\left(5a_{Gx}+2a_{Gy}\right)-\frac{5m_3}{12}\alpha_3 L^2\right]}\ \text{->}\ \boxed{\overrightarrow{M_4}=75,4Nm\vec{k}}$$

Oharra: Potentzi birtualen metodoa erabiliz ebatzi da problema.