eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

Autoevaluación

OCW 2018: *Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería*

Test nº2 (resolución)

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Unzueta Inchaurbe, Aitziber

Arrospide Zabala, Eneko

García Ramiro, María Begoña

Soto Merino, Juan Carlos

Alonso González, Erik

Departamento de Matemática Aplicada

Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

OCW OpenCourseWare

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN: Test nº2

Ejercicio nº1

Enunciado

Calcule $dim(F)$ siendo $F = \mathcal{L}(\{(1, 0, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 1, -1, 3), (0, 1, 2, 5), (3, -1, -5, 0)\}) \subset \mathbb{R}^4$.

Resolución

```
M = {{1, 0, -1, 0}, {2, 1, 0, 0}, {3, 1, -1, 3}, {0, 1, 2, 5}, {3, -1, -5, 0}}; MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[M]
```

3

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº2

Enunciado

Señale una base del subespacio:

$$F = \mathcal{L}(\{(1, 0, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 1, -1, 3), (0, 1, 2, 5), (3, -1, -5, 0)\}) \subset \mathbb{R}^4$$

Resolución

```
M = {{1, 0, -1, 0}, {2, 1, 0, 0}, {3, 1, -1, 3}, {0, 1, 2, 5}, {3, -1, -5, 0}}; MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
RowReduce[M]
```

```
{{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 2, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº3

Enunciado

Halle una ecuación cartesiana del subespacio:

$$F = \mathcal{L}(\{(1, 0, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 1, -1, 3), (0, 1, 2, 5), (3, -1, -5, 0)\}) \subset \mathbb{R}^4$$

Resolución

```
M = {{1, 0, -1, 0}, {2, 1, 0, 0}, {3, 1, -1, 3}, {0, 1, 2, 5}, {3, -1, -5, 0}};

sg = RowReduce[M]

{{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 2, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

base = {sg[[1]], sg[[2]], sg[[3]]}

{{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 2, 0}, {0, 0, 0, 1}}

gen = {x, y, z, t};

mat = Join[base, {gen}]

{{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 2, 0}, {0, 0, 0, 1}, {x, y, z, t}}

Solve[Det[mat] == 0, gen]

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

{{z → -x + 2 y}}
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$

Ejercicio nº4

Enunciado

Exprese las coordenadas del vector $\vec{v}\left(\frac{1}{7}, \frac{29}{14}, 4, 65\right) \in F \subset \mathbb{R}^4$ respecto de la base del subespacio F:

$$B = \{(2, 1, 0, 0), (3, 1, -1, 3), (0, 1, 2, 5)\}$$

Resolución

```
Clear[a, b, c, s]

v = {1/7, 29/14, 4, 65}; bas = {{2, 1, 0, 0}, {3, 1, -1, 3}, {0, 1, 2, 5}}; MatrixRank[bas]

3

coef = {a, b, c}; s = Sum[coef[[i]] * bas[[i]], {i, Length[bas]}]

{2 a + 3 b, a + b + c, -b + 2 c, 3 b + 5 c}

coord = Solve[s == v, coef]

{{a → -209/14, b → 10, c → 7}}
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } a}$

Ejercicio nº5

Enunciado

Calcule la norma del vector $\vec{v}\left(\frac{93}{14}, -\frac{39}{14}, -\frac{171}{14}\right) \in \left(\mathbb{R}^3, <, >\right)$ considerando el producto escalar:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + 2\, y_1 \cdot y_2$$

Resolución

```
Clear[v, u, pe]

v = {93/14, -39/14, -171/14};

pe[u_, v_] := u[[1]] * v[[1]] - v[[1]] * u[[2]] - u[[1]] * v[[2]] + 2 u[[2]] * v[[2]]

Sqrt[pe[v, v]]
```

$$\frac{3\sqrt{2105}}{14}$$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{a}}$

Ejercicio nº6

Enunciado

Determine el ángulo entre los vectores $\vec{v}(1, 3, 7, -1)$, $\vec{w}\left(-1, \frac{11}{5}, -\frac{7}{3}, 1\right) \in \left(\mathbb{R}^4, \bullet\right)$ considerando el producto escalar usual. De la respuesta en grados y con cuatro cifras decimales.

Resolución

```
Clear[v, w]

v = {1, 3, 7, -1}; w = {-1, 11/5, -7/3, 1};

N[VectorAngle[v, w] / Degree, 7]

115.6062
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{f}}$

Ejercicio nº7

Enunciado

Considerando el producto escalar usual, obtenga una base ortonormal, B_O, del subespacio:

$$F = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}\left(0, \tfrac{1}{2}, 0\right), \vec{v}(2, 1, -2), \vec{w}\left(-1, -\tfrac{1}{4}, 1\right)\right\}\right) \subset \left(\mathbb{R}^3, \bullet\right)$$

Resolución

```
Clear[u, v, w]

sis = {u = {0, 1/2, 0}, v = {2, 1, -2}, w = {-1, -1/4, 1}};

s = Orthogonalize[sis] // Simplify
```

$\left\{\{0, 1, 0\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}$

```
bo = Table[s[[i]], {i, Length[s] - 1}]
```

$\left\{\{0, 1, 0\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

- Solución: Opción ***c***

Ejercicio nº8

Enunciado

Considerando el producto escalar usual, proyecte ortogonalmente el vector $\vec{r}\,(-1, 0, -1) \in (\mathbb{R}^3, \bullet)$ sobre el subespacio:

$$F = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}\left(0, \tfrac{1}{2}, 0\right), \vec{v}\,(2, 1, -2), \vec{w}\left(-1, -\tfrac{1}{4}, 1\right)\right\}\right) \subset (\mathbb{R}^3, \bullet)$$

Resolución

```
Clear[u, v, w]

sis = {u = {0, 1/2, 0}, v = {2, 1, -2}, w = {-1, -1/4, 1}}; r = {-1, 0, -1};

s = Orthogonalize[sis] // Simplify
```

$\left\{\{0, 1, 0\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}$

```
bo = Table[s[[i]], {i, Length[s] - 1}]
```

$\left\{\{0, 1, 0\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

```
pr = Sum[Projection[r, bo[[i]]], {i, Length[bo]}]
```

{0, 0, 0}

- Solución: Opción ***e***

Ejercicio nº9

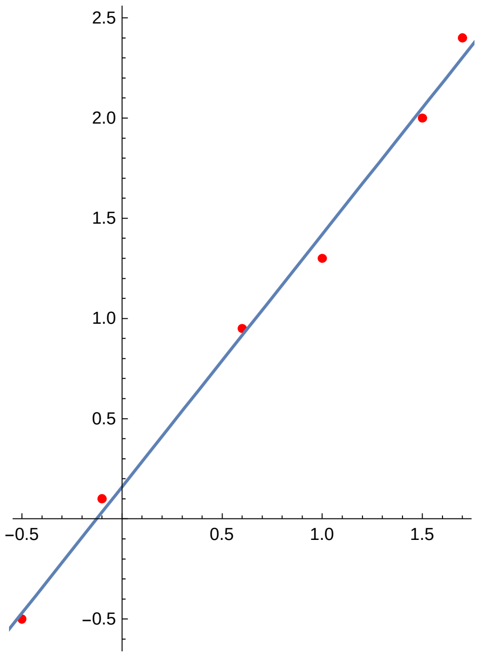
Enunciado

Calcular la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos:

$$A\,(-0.5, -0.5),\ B\,(-0.1, 0.1),\ C\,(0.6, 0.95),\ D\,(1, 1.3),\ E\,(1.5, 2),\ F\,(2, 2.8)$$

Resolución

```
puntos = {{-0.5, -0.5}, {-0.1, 0.1}, {0.6, 0.95}, {1, 1.3}, {1.5, 2}, {1.7, 2.4}};

recta = Fit[puntos, {1, x}, x]

0.159337 + 1.26047 x

nube = ListPlot[puntos, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];

rec = Plot[recta, {x, -1, 3}, AspectRatio → Automatic, PlotLegends → "Expressions"];

Show[nube, rec, AspectRatio → Automatic]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } f}$

Ejercicio nº10

Enunciado

Se considera el espacio vectorial $(C[0, 1], \bullet)$ con el producto escalar usual. Aproxime la función $f(x) = ln(1 + x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ mediante un polinomio de grado dos. Utilice cuatro cifras significativas en los coeficientes del polinomio.

Resolución

```
f[x_] := Log[x + 1];

pe[f_, g_] := Integrate[f * g, {x, 0, 1 / 2}]

{f1[x_] := 1, f2[x_] := x, f3[x_] := x^2};

base = {f1[x], f2[x], f3[x]};

bort = Orthogonalize[base, pe] // Simplify;
```

```
vp[x_] = Sum[Projection[f[x], bort[[i]], pe], {i, Length[bort]}] // Simplify
```

$$-1-\frac{5}{6}\left(1-12x+24x^2\right)(73+180\,\text{Log}[2]-180\,\text{Log}[3])+\text{Log}\left[\frac{27}{8}\right]+\frac{3}{2}(-1+4x)\left(5-2\,\text{Log}\left[\frac{729}{64}\right]\right)$$

```
N[vp[x], 4] // Expand
```

$0.0012+0.969x-0.3256x^2$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$

Ejercicio nº11

Enunciado

Si es posible, halle la matriz diagonal que verifica $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$ siendo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Resolución

```
Clear[A, s]
```

```
A = {{1, 2, 4}, {2, 1, -4}, {0, 0, 3}}; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

```
s = Eigensystem[A]
```

{{3, 3, -1}, {{2, 0, 1}, {1, 1, 0}, {-1, 1, 0}}}

```
d = DiagonalMatrix[s[[1]]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } e}$

Ejercicio nº12

Enunciado

Si es posible, indique una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Resolución

```
Clear[A, s]
```

```
A = {{1, 2, 4}, {2, 1, -4}, {0, 0, 1}}; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
s = Eigensystem[A]
```

{{3, -1, 1}, {{1, 1, 0}, {-1, 1, 0}, {2, -2, 1}}}

```
base = Orthogonalize[s[[2]]]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$