Autoevaluación

OCW 2018: *Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería*

Test nº1 (resolución)

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Unzueta Inchaurbe, Aitziber

Arrospide Zabala, Eneko

García Ramiro, María Begoña

Soto Merino, Juan Carlos

Alonso González, Erik

Departamento de Matemática Aplicada

Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN: Test nº1

Ejercicio nº1

Enunciado

Simplifique la siguiente expresión simbólica: $E = 15\left[\frac{2}{3}(x-3) - \frac{4}{5}\left(\frac{y}{2} - x\right) + \frac{1}{5}(x+2) + 2(1-y)\right]$

Resolución

```
exp = 15 * (2 (x - 3) / 3 - 4 (y / 2 - x) / 5 + (x + 2) / 5 + 2 (1 - y));
```

```
Simplify[exp]
```

```
6 + 25 x - 36 y
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº2

Enunciado

Calcule la matriz $C = A^2 - 2\,AB + B^2$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolución

```
A = {{1, 1}, {1, 0}}; B = {{0, 1}, {1, 1}};
```

```
A.A - 2 A.B + B.B
```

```
{{1, -2}, {2, 1}}
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº3

Enunciado

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Resolución

```
Clear[A]
```

```
A = {{1, 1, 1, 1}, {0, 1, 1, 1}, {0, 1, 2, 3}, {0, 1, 5, 9}}; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[A]
```

3

- Solución: Opción ***d***

Ejercicio nº4

Enunciado

Calcule el determinante del producto de las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolución

```
Clear[A, B, c]
```

```
A = {{0, 1}, {1, 0}}; B = {{2, 1}, {1, 1}}; c = {{2, 1}, {0, 2}};
```

- Cálculo del producto de los determinantes de las matrices

```
Det[A] * Det[B] * Det[c]
```

-4

- Cálculo del determinante del producto de las matrices

```
Det[A.B.c]
```

-4

- Solución: Opción ***d***

Ejercicio nº5

Enunciado

Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolución

```
A = {{1, 2}, {3, 4}};
```

```
Inverse[A]
```

$\left\{\{-2, 1\}, \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

- Solución: Opción ***b***

Ejercicio nº6

Enunciado

Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

Resolución

```
mat = {{1, 1, 1}, {1, x, 1}, {1, 1, x^2}}; MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{pmatrix}$$

```
Solve[Det[mat] == 0, x]
```

```
{{x → -1}, {x → 1}, {x → 1}}
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº7

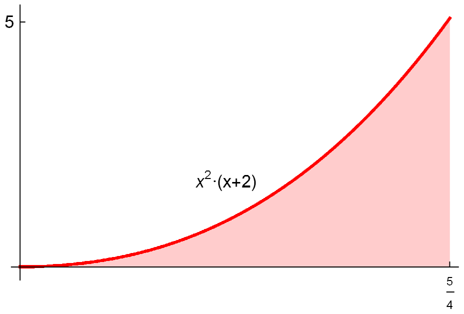
Enunciado

Calcule, con cinco cifras significativas, el área limitada en el intervalo $[0, 1.25]$ por la gráfica de $f(x) = (x + 2)\, x^2$ y el eje de abscisas.

Resolución

```
f[x_] = (x + 2) x^2;
```

```
ar = Plot[f[x], {x, 0, 5/4}, PlotStyle → {Red}, Filling → Bottom,
  PlotLabels → Placed[{"x^2 · (x+2)"}, {0.6, 1.8}], Ticks → {{0, 5/4}, {5}}]
```




```
int = Integrate[f[x], {x, 0, 5/4}]
```

$$\frac{5875}{3072}$$

```
N[int, 5]
```

```
1.9124
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{c}}$

Ejercicio nº8

Enunciado

Obtenga, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$.

Resolución

```
Clear[M, a]
```

- Introducción de la matriz 3×3: $rg(M) \leq 3$

```
M = {{1 - a, 1, 1}, {1, 1 - a, 1}, {1, 1, 1 - a}}; MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

- Cálculo de los valores que anulan el determinante de la matriz

```
sol = Solve[Det[M] == 0, a]
```

```
{{a → 0}, {a → 0}, {a → 3}}
```

- Caso 1: $a = 0$

```
MatrixRank[M /. a → 0]
```

```
1
```

- Caso 2: $a = 3$

```
MatrixRank[M /. a → 3]
```

```
2
```

- Caso 3: $a \neq 0 \wedge a \neq 3 \Longrightarrow det(M) \neq 0 \Longrightarrow r(M) = 3$
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{a}}$

Ejercicio nº9

Enunciado

Señale una solución particular del sistema: $S \equiv \begin{cases} x - y + z - 3w = 4 \\ 4x + 3y - z + w = 0 \\ 5x + 2y + z - w = 4 \end{cases}$

Resolución

```
S = {x - y + z - 3 w == 4, 4 x + 3 y - z + w == 0, 5 x + 2 y + z - w == 4};
```

```
Solve[S, {x, y, z}]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{2}{7}(6 + 5w),\ y \to -\frac{2}{7}(8 + 9w),\ z \to -w\right\}\right\}$$

```
{2/7 (6 + 5 w), -2/7 (8 + 9 w), -w} /. w → 2/3
```

$\left\{\frac{8}{3}, -4, -\frac{2}{3}\right\}$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{f}}$

Ejercicio nº10

Enunciado

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $S \equiv \begin{cases} x - y + z - 3\,w = 4 \\ 4\,x + 3\,y - z + w = 0 \\ 5\,x + 2\,y + z - w = 4 \end{cases}$

Resolución

```
S = {x - y + z - 3 w == 4, 4 x + 3 y - z + w == 0, 5 x + 2 y + z - w == 4};

Solve[S, {x, y, z, w}]
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\left\{\left\{y \to \frac{4}{5} - \frac{9\,x}{5},\ z \to \frac{6}{5} - \frac{7\,x}{10},\ w \to -\frac{6}{5} + \frac{7\,x}{10}\right\}\right\}$

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº11

Enunciado

Resuelva, en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S \equiv \begin{cases} x + y + z = a \\ x + (1 + a)\,y + z = 2\,a \\ x + y + (1 + a)\,z = 0 \end{cases}$$

Resolución

```
Clear[S]

S = {x + y + z == a, x + (1 + a) y + z == 2 a, x + y + (1 + a) z == 0};

Reduce[S, {x, y, z}]
```

(a == 0 && z == -x - y) || (a ≠ 0 && x == a && y == 1 && z == -1 + a - x)

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº12

Enunciado

Discuta, en función de los valores de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$, la naturaleza del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ -x+by+z=1 \\ -x-y-z=a \\ -x-y+z=1 \end{cases}$$

Resolución

```
Clear[S]

S = {x + y + z == 3, -x + b * y + z == 1, -x - y - z == a, -x - y + z == 1};

Reduce[S, {x, y, z}]

(b == -1 && a == -3 && y == 1 - x && z == 2) || (a == -3 && 1 + b ≠ 0 && x == 1 && y == 0 && z == 2)
```

- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{e}}$