Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Ejercicios resueltos

# OCW 2018: *Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería*

## Tema 6. Análisis espectral


**Equipo docente del curso**
*Martín Yagüe, Luis*
*Unzueta Inchaurbe, Aitziber*
*Arrospide Zabala, Eneko*
*García Ramiro, María Begoña*
*Soto Merino, Juan Carlos*
*Alonso González, Erik*

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

# EJERCICIOS DEL TEMA 6. ANÁLISIS ESPECTRAL

## Ejercicio nº1

### Enunciado

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}$.

- a) Calcule el polinomio característico.
- b) Utilice el polinomio característico para calcular el espectro de la matriz $A$.
- c) Obtenga el subespacio asociado al valor propio doble.
- d) Determine si la matriz $A$ es diagonalizable por semejanza .

### Resolución

- a) Calcule el polinomio característico.
  - Definición de la matriz:

```
A = {{1, 1, 3}, {0, 1, 0}, {0, 0, -1}}; A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Cálculo del polinomio característico:

```
p[λ_] = CharacteristicPolynomial[A, λ]
```

$-1 + \lambda + \lambda^2 - \lambda^3$

- b) Utilice el polinomio característico para calcular el espectro de la matriz $A$.
  - El espectro de la matriz $A$ lo constituyen las raíces del polinomio característico:

```
r = Solve[p[λ] == 0, λ]
```

```
{{λ → -1}, {λ → 1}, {λ → 1}}
```

  - El espectro de la matriz $A$ es:

$$\boxed{\sigma(A) = \{\lambda_1 = -1\ (k_1 = 1),\ \lambda_2 = 1\ (k_2 = 2)\}}$$

  - Otra forma de calcular el espectro es utilizando el comando **Eigenvalues**

```
Eigenvalues[A]
```

```
{-1, 1, 1}
```

- c) Obtenga el subespacio asociado al valor propio doble.
  - Mediante el comando **Eigensystem** se obtienen los valores y vectores propios de $A$:

```
Eigensystem[A]
```

```
{{-1, 1, 1}, {{-3, 0, 2}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}}}
```

- El vector propio asociado al valor propio doble es $\{1,0,0\}$; entonces el subespacio propio es:

$$\boxed{V(1) = \mathcal{L}(\{1, 0, 0\}) \Longrightarrow dim(V(1)) = 1}$$

- Otra forma de calcularlo:

```
Solve[(A - 1*IdentityMatrix[3]).{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]
```

··· Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
{{y → 0, z → 0}}
```

- El subespacio propio se expresa como:

$$\boxed{V(1) = \{(x, 0, 0) / x \in \mathbb{R}\}}$$

- d) Determine si la matriz $A$ es diagonalizable por semejanza .
  - La matriz $A$ no es diagonalizable porque no coinciden las multiplicidades algebraica y geométrica:

$$\boxed{k_2 = 2 \neq dim(V(1)) = 1}$$

## Ejercicio nº2

### Enunciado

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times4}$.

- a) Demuestre que $A$ es diagonalizable ortogonalmente, calculando la matriz $P$ y $D$ tal que $D = P^{T} \cdot A \cdot P$
- b) Calcule una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios ortonormales de $A$.
- c) Compruebe que la matriz $A$ verifica el teorema de Cayley-Hamilton.

### Resolución

- a) Demuestre que $A$ es diagonalizable ortogonalmente, calculando la matriz $P$ y $D$ tal que $D = P^{T} \cdot A \cdot P$
  - Definición de la matriz:

```
A = {{2, 0, 2, 0}, {0, -1, 0, 1}, {2, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, -1}}; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Como la matriz es simétrica entonces es diagonalizable ortogonalmente.

```
s = Eigensystem[A]
```

```
{{3, -2, -2, 0}, {{2, 0, 1, 0}, {0, -1, 0, 1}, {-1, 0, 2, 0}, {0, 1, 0, 1}}}
```

```
bo = Orthogonalize[s[[2]]]
```

$$\left\{\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

- Matriz de paso $P$:

```
P = Transpose[bo]; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```
d = DiagonalMatrix[s[[1]]]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Transpose[P] == Inverse[P]
```

True

```
d == Transpose[P].A.P
```

True

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \quad \boxed{D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- b) Calcule una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios ortonormales de $A$.
  - La base pedida es:

$$\boxed{B_O = \left\{\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}}$$

  - Se comprueba que los vectores de esta base son ortonormales respecto al producto escalar usual; para ello se calcula la matriz de Gram:

```
Gram = Table[bo[[i]].bo[[j]], {i, 1, 4}, {j, 1, 4}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Compruebe que la matriz $A$ verifica el teorema de Cayley-Hamilton.
  - Polinomio característico:

```
p[λ_] = CharacteristicPolynomial[A, λ]
```

$-12\lambda - 8\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4$

```
MatrixPower[A, 4] + MatrixPower[A, 3] - 8 A.A - 12 A == DiagonalMatrix[{0, 0, 0, 0}]
```

True

# Ejercicio nº3

## Enunciado

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2m-n & 0 & 2m-2n \\ 1 & m & 2 \\ -m+n & 0 & -m+2n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}$.

- a) Determine para qué valores de $m$ y $n$ la matriz $A$ es diagonalizable.
- b) Cuando la matriz $A$ sea diagonalizable calcule las matrices $D$ y $P$ tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

## Resolución

- a) Determine para qué valores de $m$ y $n$ la matriz $A$ es diagonalizable.
  - Definición de la matriz:

```
A = {{2 m - n, 0, 2 m - 2 n}, {1, m, 2}, {-m + n, 0, -1 m + 2 n}}; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 2m-n & 0 & 2m-2n \\ 1 & m & 2 \\ -m+n & 0 & -m+2n \end{pmatrix}$$

```
p[λ_] = CharacteristicPolynomial[A, λ] // Factor
```

$-(m-\lambda)^2(-n+\lambda)$

- Caso 1: $\boxed{m \neq n}$
  - Espectro de la matriz $A$ : $\boxed{\sigma(A) = \{\lambda_1 = n\,(k_1 = 1),\ \lambda_2 = m\ (k_2 = 2)\}}$
  - Subespacio asociado al valor propio $\lambda_2 = m$ :

```
Reduce[(A - m*IdentityMatrix[3]).{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]
```

$z == -\frac{x}{2}$

$$\boxed{V(m) = \{(-2z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow V(m) = \mathcal{L}(\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}) \Longrightarrow dim V((m)) = 2}$$

- $A$ es diagonalizable ya que para el valor propio doble : $\boxed{k_2 = 2 = dim(V(m))}$
- Subespacio asociado a $\lambda_1 = n$ :

```
Reduce[(A - n*IdentityMatrix[3]).{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]
```

$\left(m == n \,\&\&\, z == -\frac{x}{2}\right) \,||\, (m == n \,\&\&\, x == 0 \,\&\&\, z == 0) \,||\, \left(m - n \neq 0 \,\&\&\, y == \frac{x}{m-n} \,\&\&\, z == -x\right)$

$$\boxed{V(n) = \left\{\left(x, \frac{x}{m-n}, -x\right) \Big/ x \in \mathbb{R}\right\} \Longrightarrow V(n) = \mathcal{L}\left(\left(1, \frac{1}{m-n}, -1\right)\right) \Longrightarrow dim(V(n)) = 1}$$

- Caso 2: $\boxed{m = n}$

```
n = m; A; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

- Espectro de la matriz $A$ : $\boxed{\sigma(A) = \{\lambda_1 = m\,(k_1 = 3)\}}$

- Subespacio asociado al valor propio $\lambda_1 = m$:

```
Reduce[(A - m*IdentityMatrix[3]).{x, y, z} == {0, 0, 0}, {x, y, z}]
```

$$z == -\frac{x}{2}$$

$$\boxed{V(m) = \{(-2z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow V(m) = \mathcal{L}(\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}) \Longrightarrow dimV((m)) = 2}$$

- $A$ no es diagonalizable ya que para el único valor propio (triple) : $\boxed{k_1 = 3 \neq 2 = dim(V(m))}$

- Nota: No se puede utilizar el comando **Eigensystem[A]** cuando hay parámetros. Se observa que sólo se considera el caso en que $m \neq n$.

```
Clear[m, n]
```

```
s = Eigensystem[A]
```

$$\left\{\{m, m, n\}, \left\{\{-2, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \left\{-1, -\frac{1}{m-n}, 1\right\}\right\}\right\}$$

- b) Cuando la matriz $A$ sea diagonalizable calcule las matrices $D$ y $P$ tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

```
Clear[m, n]
```

```
s = Eigensystem[A]
```

$$\left\{\{m, m, n\}, \left\{\{-2, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \left\{-1, -\frac{1}{m-n}, 1\right\}\right\}\right\}$$

```
d = DiagonalMatrix[s[[1]]]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

```
P = Transpose[s[[2]]]; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{m-n} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Inverse[P].A.P == d // Simplify
```

True

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{m-n} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{D = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}}$$

## Ejercicio nº4

### Enunciado

Sea una matriz $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}$ tal que $V(1) = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio propio correspondiente al valor propio $\lambda_1 = m$.

Además se cumple que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- a) Justifique que la matriz es diagonalizable.
- b) Calcule la matriz $A$.

---

Resolución

- a) Justifique que la matriz es diagonalizable.
  - Subespacio propio $V(1): \lambda_1 = 1$
    - $V(1) = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$
    - $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ libre $\Longrightarrow dim(V(1)) = 2$
  - $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
    - Se deduce: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot \vec{v} = 3 \cdot \vec{v} \Longrightarrow \lambda_2 = 3$ valor propio asociado a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
    - $V(3) = \mathcal{L}(\{(1, 1, 2)\}) \Longrightarrow dim(V(3)) = 1$
  - La matriz $A$ es diagonalizable:
    - Espectro de $A$ : $\boxed{\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1\,(k_1 = 2),\ \lambda_2 = 3\ (k_2 = 1)\}}$
    - Las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios coinciden y, además, $k_1 + k_2 = 3 = dim\left(\mathbb{R}^3\right)$
    - Base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A$ : $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 2)\}$
- b) Calcule la matriz $A$.
  - Como la matriz es diagonalizable se verifica: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Longrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$
  - Matriz de paso $P$ formada por los vectores propios

```
P = Transpose[{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 1, 2}}]; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  - Matriz diagonal $D$

```
d = DiagonalMatrix[{1, 1, 3}]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  - Por lo tanto la matriz $A$ es:

```
A = P.d.Inverse[P]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$